Министерство образования и науки РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования

Петрозаводский государственный университет

Б. М. Широков, В. А. Шестаков

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

Учебное пособие для студентов математического факультета

Петрозаводск
Издательство ПетрГУ
2013

УДК 51
ББК 22.1
Ш31

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Петрозаводского государственного университета

Издается в рамках реализации комплекса мероприятий
Программы стратегического развития ПетрГУ на 2012 – 2016 гг.

Рецензенты:

доктор физ.-мат. наук, проф. С. С. Платонов;
доктор физ-мат наук, проф. В. В. Старков

Широков, Б. М.

Ш31 Теория множеств : учеб. пособие для студентов мат. фак. / Б. М. Широков, В. А. Шестаков. — Петрозаводск : Изд-во ПетрГУ, 2013. — 40 с.

ISBN 978–5–8021–1627–2

Учебное пособие представляет собой вводную часть курса «Математический анализ» на математическом факультете и содержит основные понятия теории множеств: операции над множествами, функции, мощность множеств, счетные и континуальные множества. Благодаря большому количеству задач, оно может быть использовано и как задачник по этому разделу.

Учебное пособие адресовано, в основном, студентам первого курса математического факультета.

УДК 51
ББК 22.1

ISBN 978–5–8021–1627–2

Предисловие

Это учебное пособие представляет собой изложение вводной части курса «Математический анализ», который оба автора читают на математическом факультете Петрозаводского госуниверситета.

В настоящее время изложение математического анализа немыслимо без теории множеств. Хотя, сопоставляя математику, которой сейчас обучают в школе, с теорией множеств, вряд ли уверенно можно утверждать,что именно такое начало изучения анализа будет безболезненно перенесено студентами первого курса. Но изучение предмета нужно начинать с его основ.[1]

Наибольшая трудность состоит в абстракции, объяснимой тем, что теория множеств применяется в анализе не только для изучения функций одной действительной переменной. Поэтому от абстракции отказаться невозможно, но для удобства усвоения материала мы рекомендуем представлять абстрактные множества конкретными, например, на прямой или на плоскости.

Для наглядности в тексте используются символы математической логики как языковые сокращения: пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ обозначают некоторые высказывания, а $\mathcal{P}(x)$ означает, что объект x обладает свойством $\mathcal{P}$. Тогда

$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$	означает:	$\mathcal{A}$ влечет $\mathcal{B}$ (если $\mathcal{A}$, то $\mathcal{B}$);
$\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$	означает:	$\mathcal{A}$ равносильно $\mathcal{B}$ ($\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{B}$);
$\exists x(\mathcal{P}(x))$	означает:	существует объект x, обладающий свойством $\mathcal{P}$;
$\forall x(\mathcal{P}(x))$	означает:	любой объект x обладает свойством $\mathcal{P}$;
$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$	истинно тогда и только тогда, когда истинно	хотя бы одно из двух: $\mathcal{A}$ или $\mathcal{B}$;
$\mathcal{A} \& \mathcal{B}$	истинно тогда и только тогда, когда истинны	оба высказывания: $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$.

[1] Мы излагаем «наивную» теорию множеств в отличие от аксиоматической (см., например, [8]). Упражнения, в основном, заимствованы из книг [5,6,7].

1. Множества

Под *множеством* понимается совокупность различающихся между собой объектов, которые называются элементами данного множества.

Множества будем обозначать прописными буквами латинского или греческого алфавита, а их элементы — строчными.

Для того чтобы записать, что x является элементом множества X, используется обозначение: $x \in X$ (читается: «x принадлежит множеству X»), а что x не является элементом множества X — обозначение $x \notin X$ («x не принадлежит множеству X»).

Определение 1.1. *Пусть A и B — множества. Говорят, что A является подмножеством (частью) множества B (A содержится в B, B содержит A), если любой элемент множества A является элементом множества B.*

В символической форме это определение выглядит следующим образом:

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Определение 1.2. *Два множества A и B называются равными (обозначение $A = B$), если $A \subset B$ и $B \subset A$, то есть*

$$A = B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \Leftrightarrow x \in B).$$

Если $A \subset B$ и $\neq B$, то A называется собственным подмножеством множества B.

В теории множеств оказывается очень полезным специальное множество, которое не содержит ни одного элемента, называемое *пустым*. Для него принято обозначение $\emptyset$. Например,

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 = 0\} = \emptyset.$$

Для часто встречающихся в математике множеств используются общепринятые обозначения:

$\mathbb{N}$ — множество всех натуральных чисел;
$\mathbb{Z}$ — множество всех целых чисел;
$\mathbb{Q}$ — множество всех рациональных чисел;
$\mathbb{R}$ — множество всех вещественных чисел;
$\mathbb{R}^2$ — множество всех точек плоскости.

Приведем некоторые удобные способы задания множеств, которых будем придерживаться в дальнейшем.

а) Пусть M — некоторое фиксированное множество, $\mathcal{P}$ — свойство, которым могут обладать или не обладать элементы из M. Тогда существует множество A, являющееся подмножеством в M и состоящее из тех и только тех элементов $x \in M$, которые обладают свойством $\mathcal{P}$. Для такого множества используется запись:

$$A = \{x \in M \mid \mathcal{P}(x)\}.$$

Например, $M = \{x \in M \mid x = x\}$, $\emptyset = \{x \in M \mid x \neq x\}$, $\{x \in \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N}$ такой, что $x = 2y\}$ — множество всех четных натуральных чисел.

Если из контекста ясно, о каком множестве M идет речь, то в записи множества A символ M будем опускать:

$$A = \{x \mid \mathcal{P}(x)\}.$$

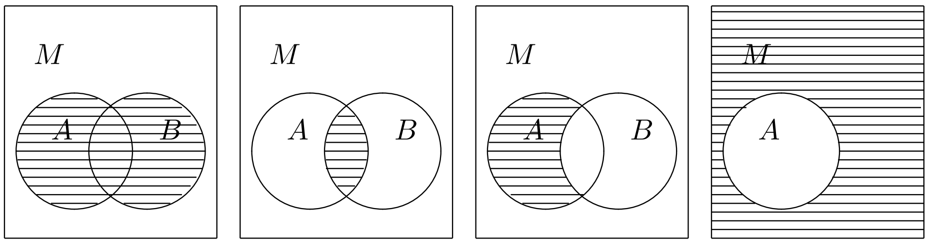
б) Пусть Λ — некоторое множество, элементы которого являются индексами элементов множества B. Тогда множество B будет записываться в виде:

$$B = \{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}.$$

Например, $B = \{2k - 1\}_{k \in \mathbb{N}}$ — множество всех нечетных натуральных чисел.

2. Операции над множествами

Пусть M — некоторое фиксированное множество и все множества, рассматриваемые в этом параграфе, есть его подмножества. В таком случае множество M называют *универсальным.*



а б в гf

Рис. 1

1. Объединение множеств

Определение 2.1. *Объединением множеств A и B называется множество*

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \quad x \in B\},$$

состоящее из тех элементов множества M, которые являются элементами хотя бы одного из множеств A и B (рис. 1, а).

2. Пересечение множеств

Определение 2.2. *Пересечением множеств A и B называется множество*

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \quad x \in B\},$$

состоящее из тех элементов множества M, которые одновременно являются элементами как множества A, так и множества B (рис. 1, б).

Множества A и B называются *непересекающимися* или *дизъюнктными*, если $A \cap B = \emptyset$.

Ясно, что $A \cap B \subset A \subset A \cup B$, $A \cap B \subset B \subset A \cup B$.

3. Разность множеств

Определение 2.3. *Разностью множеств A и B называется мно-*

жество

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \quad x \notin B\},$$

состоящее из тех элементов множества A, которые не принадлежат множеству B (рис. 1, в).

Разность $M \setminus A$ называется *дополнением* A в M и обозначается CA, или $\overline{A}$, или A^c (см. рис. 1, г).

Отметим основные свойства операций над множествами:

1°. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$;	(Дистрибутивные
2°. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.	законы)
3°. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;	(Правила двойственности
4°. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.	де Моргана)

4. Прямое произведение множеств

Пусть X, Y — множества. Если $x \in X$, $y \in Y$, то можно образовать новый объект — упорядоченную пару (x, y). При этом две пары (x_1, y_1) и (x_2, y_2) считаются равными тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

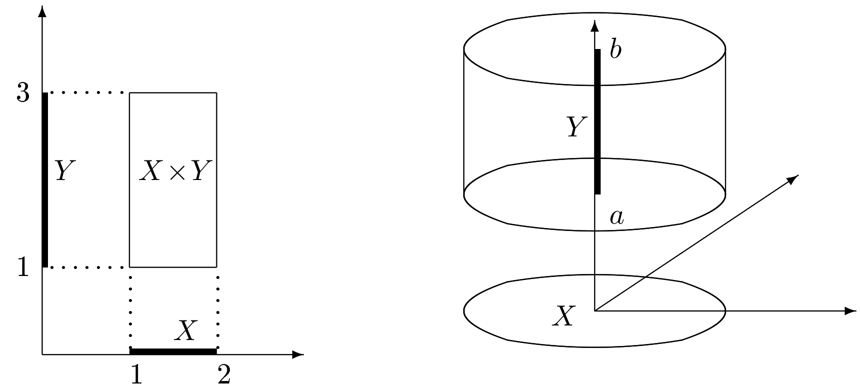
Замечание. Упорядоченность пары (x, y) означает, что если даже существует пара (y, x) и $x \neq y$, то $(x, y) \neq (y, x)$.

Множество всех упорядоченных пар (x, y), где $x \in X, y \in Y$, называется *прямым* или *декартовым произведением* множеств X и Y и обозначается через $X \times Y$:

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}.$$

Например, если $X = [1, 2] = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 2\}$, $Y = [1, 3] = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 \leq y \leq 3\}$, то прямое произведение $X \times Y$ можно интепретировать как прямоугольник в $\mathbb{R}^2$ с вершинами $(1,1), (1,3), (2,1), (2,3)$ (рис. 2, а). Если же X есть круг $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq r^2\}$, а $Y = [a, b]$, то множество $X \times Y$ можно рассматривать как цилиндр (рис. 2, б).

Множество $\mathbb{R}^2$ всех точек плоскости можно рассматривать как прямое произведение $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, то есть $\mathbb{R}^2$ — прямой квадрат



а б

Рис. 2

множества $\mathbb{R}$. Аналогично можно ввести $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^n$ для трехмерного и n-мерного пространства и вообще — степени X^3, X^n для произвольного множества X.

Пример 1. Докажем равенство $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$. Докажем сначала включение $(A \setminus B) \cup B \subset A \cup B$. Пусть $x \in (A \setminus B) \cup B$. Это означает, что $x \in A \setminus B$ или $x \in B$. Тем более $x \in A$ или $x \in B$, то есть $x \in A \cup B$.

Для доказательства обратного включения $A \cup B \subset (A \setminus B) \cup B$ предположим, что $x \in A \cup B$, то есть $x \in A$ или $x \in B$. Если $x \in B$, то $x \in (A \setminus B) \cup B$. Если же $x \notin B$, то по условию $x \in A$ и, следовательно, $x \in A \setminus B$ и, тем более, $x \in (A \setminus B) \cup B$.

Пример 2. Докажем первый дистрибутивный закон:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

В данном случае доказательство равенства допускает более краткую запись:

$$\begin{gathered} x \in (A \cup B) \cap C \iff (x \in A \cup B \quad x \in C) \iff \\ \iff ((x \in A \quad x \in B) \quad x \in C) \iff (x \in A \quad x \in C) \end{gathered}$$

$$(x \in B \quad x \in C) \iff (x \in A \cap C \quad x \in B \cap C) \iff$$
$$\iff x \in (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

Упражнения. Если для некоторого натурального числа n множество A можно записать в виде $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$, причем все элементы x_i попарно различны, то это множество будем называть *конечным множеством, содержащим n элементов.*

На с. 26 будет дано точное определение конечного множества, которое, по существу, совпадает с этим.

2.1. Сколько различных подмножеств у конечного множества, содержащего n элементов?

2.2. Пусть конечное множество A имеет n элементов; $1 \le k \le n$. Через C_n^k принято обозначать количество различных k-элементных подмножеств множества A или «количество сочетаний из n элементов по k».

а) Доказать, что $C_n^k = C_n^{n-k}$.

б) Вычислить количество P_n^k различных упорядоченных наборов по k элементов без повторений из множества A.

в) Вычислить C_n^k.

2.3. Для действительного числа $x > 0$ обозначим через $A(x)$ множество тех $n \in \mathbb{N}$, для которых существуют такие p и $q \in \mathbb{N}$, что $n = 2^{p-1}(2q-1)$ и $p < qx$. Доказать, что если $0 < x < y$, то $A(x)$ является собственным подмножеством $A(y)$.

Далее все множества A, B, C, D предполагаются произвольными.

2.4. Верно ли, что

а) $A \setminus B = C \Rightarrow A = B \cup C$?

б) $A = B \cup C \Rightarrow C = A \setminus B$?

2.5. Упростить выражения для множеств:

а) $(\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (\overline{A \cup B})$;

б) $\overline{(\overline{A \cap B}) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})}$;

в) $[(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap B)] \cap B$;

г) $[(\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)] \cap A$;

д) $(A \setminus B) \cup (A \cap B)$.

2.6. Упростить выражения для множеств:

а) $(\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (\overline{A \cup B})$;

б) $\overline{(\overline{A \cap B}) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}}$;

в) $[(\overline{A} \cap B) \cup (A|capB)] \cap B$;

г) $[(\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)] \cap A$;

д) $(A \setminus B) \cup (A \cap B)$.

2.7. Доказать, что если $A \cup B = A$ и $A \cap B = A$, то $A = B$.

2.8. Для множеств A, B, C с помощью операций записать множество элементов, которые принадлежат

а) всем трем множествам;

б) по крайней мере двум из этих множеств;

в) любым двум, но не принадлежат всем трем множествам;

г) любому одному из этих множеств, но не принадлежат двум остальным.

2.9. Пусть A — множество всех прямоугольных треугольников на плоскости, B — множество равнобедренных треугольников, а C — множество треугольников, у которых хотя бы один угол равен $45°$, универсальное множество — множество всех треугольников на плоскости.

Какие треугольники составляют множества: $A \cap B$, $A \cap B \cap C$, $A \cap B \cap \overline{C}$, $(A \cap \overline{C}) \cup B$, $(A \cap C) \cup B$?

Какие из следующих утверждений истинны, а какие ложны:

а) $A \cap B \subset C$;

б) $A \cap C = B$;

в) $(A \cup B) \cap C \subset A$;

г) $A \cap B = A \cap C$?

2.10. Пусть A и B — множества целых чисел, кратных соответственно 2 и 3, $= \mathbb{N}$, а универсальное множество — $\mathbb{Z}$. Из каких чисел состоят множества: $A \cap B$, $\overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cup B$, $\overline{A} \cap \overline{B} \cap C$, $(\overline{A} \cup B) \cap C$?

2.11. Пусть множество A состоит из точек $M(x, y)$ плоскости, для которых $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$, множество B — из точек, для которых $x > 0$, и C — множество точек, у которых $y > 0$. Универсальное множество — множество всех точек плоскости. Изобразить на плоскости множества $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cap \overline{C}$, $B \cap C$, $A \cap \overline{C}$, $A \cap \overline{B}$, $A \cap B \cap \overline{C}$.

2.12. Доказать, что $B \subset A \Leftrightarrow (A \setminus B) \cup B = A \Leftrightarrow C \setminus A \subset C \setminus B$ (для $A, B \subset C$).

2.13. Доказать включения:

а) $(B \setminus C) \setminus (B \setminus A) \subset A \setminus C \subset (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$;

б) $(A \cap C) \cup (B \cap D) \subset (A \cup B) \cap (C \cup D)$.

2.14. Доказать равенства:

а) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;

б) $(B \setminus C) \cap A = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$;

в) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$;

г) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;

д) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ — это множество называется *симметрической разностью* и коротко записывается в виде $A \Delta B$.

е) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;

ж) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$;

з) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$;

и) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$;

к) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$;

л) $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$;

м) $(A \cap B) \cap (C \cap D) = (A \cup C) \cap (B \cup C) \cap (A \cup D) \cap (B \cup D)$;

н) $A \cup B \cup C = (A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A) \cup (A \cap B \cap C)$.

2.15. Доказать, что $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow C \subset A$.

2.16. Верны ли равенства:

а) $(A \cup B) \setminus C = A \cup (B \setminus C)$;

б) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$?

2.17. Доказать, что если $A \cup B = C \cup D$ и $A \cap B = C \cap D = \emptyset$, то существуют такие множества P, Q, R и S, что $A = P \cup Q$, $B = R \cup S$, $C = P \cup R$, $D = Q \cup S$.

2.18. Найти геометрическую интерпретацию прямого произведения следующих множеств:

а) прямой и окружности;

б) прямоугольника и отрезка;

в) отрезка и окружности;

г) двух окружностей;

д) окружности и круга.

2.19. Покажите, что:

а) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;

б) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$;

в) $(A \times B) \cup (C \times D) \subset (A \cup C) \times (B \cup D)$, и равенства, вообще говоря, здесь нет;

г) $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times C) \cup (A \times D) \cup (B \times D)$;

д) если $A \subset D, B \subset C$, то $A \times B = (A \times C) \cap (D \times B)$;

е) если $(A \times B) \cup (B \times A) = C \times C$, то $A = B = C$ $(A, B \neq \emptyset)$.

3. Функции

1. Определение функции

Понятие функции является одним из центральных понятий теории множеств. Иногда используют следующее «описательное» определение этого понятия.

Если любому элементу x из множества X соответствует единственный элемент y из множества Y, то говорят, что на множестве X определена функция со значениями в Y.

Это описание нельзя принять в качестве определения, так как понятие «соответствие» ранее не определено и является синонимом понятия «функция». На этом основании можно встретить заявления о том, что это понятие, наряду с понятием множества, является неопределяемым в теории множеств. А вот это уже заблуждение! Приведем определение функции.

Определение 3.1. *Если в прямом произведении $X \times Y$ выделено такое подмножество Γ, что для любого элемента $x \in X$ существует пара $(x, y) \in \Gamma$, и притом только одна, то говорят, что на множестве X задана функция со значениями в Y; y есть значение функции на элементе x, если $(x, y) \in \Gamma$.*

Если y есть значение функции на элементе x, то это коротко записывается так:

$$y = f(x),$$

а наличие такой функции отражает запись:

$$f\colon X \to Y,$$

которая читается так: «На множестве X задана функция f со значениями в Y» или «Функция f действует из X в Y».

Множество $\Gamma \subset X \times Y$ называется *графиком* функции f.

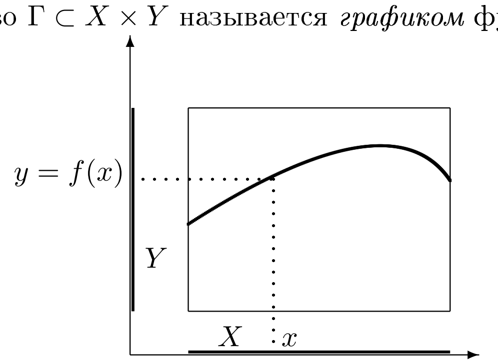


Рис. 3

Обратите внимание, что, как видно из определения, задание функции $f\colon X \to Y$ предполагает, что заданы:

1) множество X, называемое *областью определения* функции;

2) множество Y, где находятся значения функции;

3) способ зависимости $y = f(x)$.

Например, если обозначим через $\mathbb{R}_+$ множество неотрицательных действительных чисел, то функции

$$y = x^2\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad y = x^2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad y = x^2\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$$

различны. И в самом деле, они обладают совершенно разными свойствами: первая — строго монотонна, но (забежим немного вперед) у нее нет обратной функции, вторая не является монотонной, а третья — и монотонна, и имеет обратную функцию.

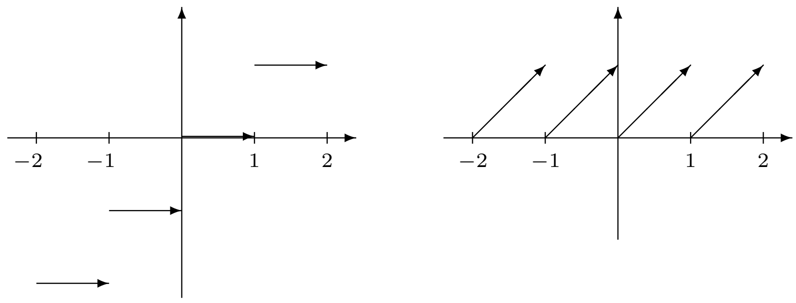
Термины «функция», «отображение» и «соответствие» являются синонимами.

Определение 3.2. *Если $f\colon X \to Y, g\colon X_1 \to Y$, причем $X_1 \subset X$ и $g(x) = f(x)$ для каждого $x \in X_1$, то функцию g называют сужением f на X и обозначают это так:*

$$g = f|_{X_1}.$$

В свою очередь, функция f называется продолжением g на множество X.

Пример 1. Пусть $X_1 = [0, 1)$, $g\colon X_1 \to \mathbb{R}$ определена формулой $g(x) = 0$. Продолжениями этой функции на множество $\mathbb{R}$ могут служить функции $f_1(x) = [x]$ — *целая часть* x, равная наибольшему целому числу, не превосходящему x, и $f_2(x) = 0$, $(x \in \mathbb{R})$ (рис. 4, а).



а б

Рис. 4

Пример 2. Пусть $f_1(x) = x, f_2(x) = x - [x] \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Значение $f_2(x)$ называется *дробной частью* числа x. Тогда функция $g\colon [0, 1) \to \mathbb{R}$, заданная формулой $g(x) = x$, является сужением на $[0, 1)$ как функции f_1, так и функции f_2 (рис. 4, б).

2. Образы и прообразы

Пусть $f\colon X \to Y, E \subset X, F \subset Y$

Определение 3.3. *Образом множества E при отображении f называется подмножество в Y, задаваемое следующим образом:*

$$f(E) = \{y \in Y \mid \exists x \in X \ y = f(x)\},$$

то есть множество всех значений функции f на множестве E.

Образ множества X, то есть множество $f(X)$, называется *областью значений* функции f.

Определение 3.4. *Прообразом множества $F \subset Y$ при отображении f называется подмножество в X, задаваемое равенством:*

$$f^{-1}(F) = \{x \in X \mid f(x) \in F\},$$

то есть множество всех значений $x \in X$, для которых значение $f(x) \in F$. Если для $y \in Y$ множество $F = \{y\}$ одноточечно, то вместо $f^{-1}(\{y\})$ будем писать $f^{-1}(y)$.

Пример 3. Пусть множество $E \subset X \times Y$. Определим функции π_1 и π_2 из E в X и Y соответственно, полагая $\pi_1(x,y) = x$ и $\pi_2(x,y) = y$. Множества

$$P = \pi_1 E = \{x \in X \mid \exists y \in Y \ (x,y) \in E\};$$
$$Q = \pi_2 E = \{y \in Y \mid \exists x \in X \ (x,y) \in E\}$$

называются *проекциями* множества E на X и на Y соответственно (рис. 5, а).

Для $x \in X$ множество

$$E_{(x)} = \pi_1^{-1}(x) = \{y \in Y \mid (x,y) \in E\}$$

называется *сечением* множества E в точке x. Аналогично для $y \in Y$ множество

$$E^{(y)} = \pi_2^{-1}(x) = \{x \in X \mid (x,y) \in E\}$$

называется *сечением* множества E в точке y (рис. 5, б).

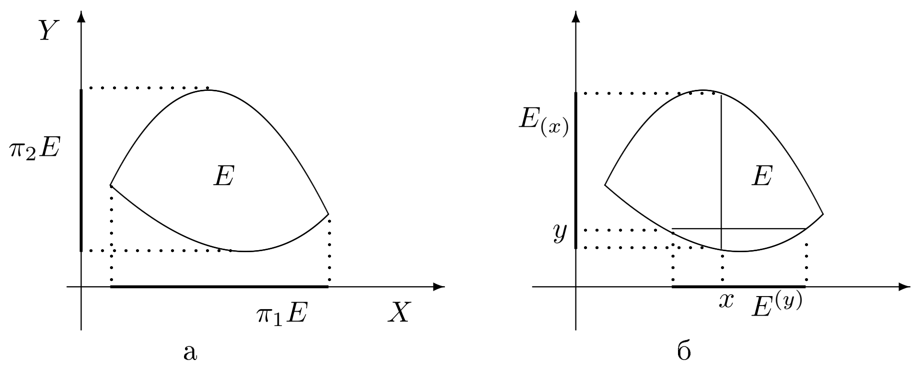


Рис. 5

Таким образом, для $x \in X$ проекция $E_{(x)}$ есть подмножество Y, а для $y \in Y$ проекция $E^{(y)}$ — подмножество X.

3. Суперпозиция функций и обратная функция

Пусть X, Y, Z — множества, и заданы функции $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$. Тогда можно построить новую функцию h из X в Z, определив значения ее на элементах $x \in X$ по формуле

$$h(x) = g(f(x)).$$

Определение 3.5. *Построенная таким образом функция h называется суперпозицией или композицией функций f и g и обозначается через $g \circ f$.*

Определение 3.6. *Пусть теперь $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to X$. Функция g называется обратной к функции F, если $(g \circ f)(x) = x$ для всякого $x \in X$, и $(f \circ g)(y) = y$ для всякого $y \in Y$.*

Функция, обратная к f, обозначается через f^{-1}.

Если Γ — график функции f, то графиком обратной функции f^{-1} будет являться множество

$$\Gamma^{-1} = \{(y, x) \in Y \times X \mid (x, y) \in \Gamma\}.$$

Замечание. Обратим внимание, что выражение $f^{-1}(y)$ может служить для обозначения прообраза точки y и для обозначения значения обратной функции f^{-1} в точке y. Это объекты разной природы: первое — подмножество в X и имеет смысл для любой функции f и для любого $y \in Y$; второе — элемент множества X и имеет смысл лишь в случае существования обратной функции. Поэтому, что же имеется в виду под $f^{-1}(y)$, должно быть ясно из контекста.

Пример 3. Пусть $f\colon X \to Y$, $A, B \subset X$. Докажем включение

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$

Действительно, если $y \in f(A \cap B)$, то найдется такой элемент $x \in A \cap B$, что $y = f(x)$. Так как $x \in A$ и $x \in B$, то $y = f(x) \in f(A)$ и $y = f(x) \in f(B)$ и, следовательно, $y \in f(A) \cap f(B)$.

Заметим, что множество $f(A \cap B)$ может быть собственной частью пересечения $f(A) \cap f(B)$. Например, если $X = [-1, 1]$, $Y = [0, 1]$, $f(x) = |x|$, $(x \in X)$, то, взяв $A = [-1, 0]$, $B = [0, 1]$, получим $f(A) = f(B) = f(A) \cap f(B) = [0, 1]$, а $f(A \cap B) = f(0) = 0$.

Упражнения

3.1. Пусть $X = Y = [-1, 1]$, $\Gamma = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$. Указать части множества Γ, которые могут служить графиком функции вида $y = f(x)$.

3.2. Пусть $f: X \to Y$; $A, B \subset X$. Доказать следующие утверждения:

а) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

б) $f(A \setminus B) \supset f(A) \setminus f(B)$.

в) Привести пример, когда между множествами в б) нет равенства.

3.3. Пусть $f: X \to Y$; $A, B \subset Y$. Доказать утверждения:

а) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$;

б) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$;

в) $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$.

3.4. Пусть $f: X \to Y$; $A \subset X$, $B \subset Y$. Верны ли утверждения:

а) $f^{-1}[f(A)] = A$;

б) $f[f^{-1}(B)] = B$?

Если какое-либо из этих утверждений неверно, то привести контрпример.

3.5. Пусть $f: X \to Y$; $A \subset X$, $B \subset Y$. Доказать, что

а) $f(A) \cap B = f[A \cap f^{-1}(B)]$;

б) $f(A) \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \cap f^{-1}(B) = \emptyset$;

в) $f^{-1}[f(A) \cap B] \supset A \cap f^{-1}(B)$.

3.6. Пусть $X = Y = Z = \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ x & x > 0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ -x^2 & x > 0 \end{cases}.$$

Найти выражения для $(f \circ g)(x)$, $(g \circ f)(x)$, $(f \circ f)(x)$, $(g \circ g)(x)$.

3.7. Пусть $f: X \to Y, g: Y \to Z$, причем существуют обратные функции f^{-1}, g^{-1}. Доказать, что суперпозиция $h = g \circ f$ также имеет обратную функцию, причем $h^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

4. Инъекции, сюръекции, биекции

Пусть X и Y — множества, и задана функция $f\colon X \to Y$.

Определение 4.1. *Функция f называется инъекцией, если для любых x_1 и $x_2 \in X$ из равенства $f(x_1) = f(x_2)$ следует, что $x_1 = x_2$.*

Иначе говоря, f — инъекция, если для любого $y \in Y$ сечение $\Gamma^{(y)}$ графика Γ функции f либо пустое, либо одноточечное.

Определение 4.2. *Функция f называется сюръекцией или отображением «на», если $f(X) = Y$.*

Иными словами, f — сюръекция, если $\pi_2\Gamma = Y$.

Функция f называется *биекцией* или *взаимооднозначным* соответствием, если f является одновременно инъекцией и сюръекцией. (В этом случае $\pi_2\Gamma = Y$ и $\forall y \in Y$ сечение $\Gamma^{(y)}$ одноточечное).

Характерным свойством для биекции является следующее:

Теорема 4.1. *Два утверждения эквивалентны:*

а) f является биекцией;

б) существует обратная функция f^{-1}.

Доказательство. а) $\Rightarrow$ б): Пусть f— биекция. Если $y \in Y$, то существует единственный $x \in X$ такой, что $y = f(x)$.

Положим $g(y) = x$. Таким образом, построена функция $g : Y \to X$. Далее для всех $x \in X$ имеем $g(f(x)) = x$ по построению g.

Если же $y \in Y$, то $f(g(y)) = f(x) = y$, опять-таки, по построению g.

б) $\Rightarrow$ а): пусть существует $g = f^{-1} : Y \to X$. Если $x_1, x_2 \in X$ и $f(x_1) = f(x_2)$, то $x_1 = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = x_2$. Следовательно, f — инъекция.

Если же y — произвольный элемент из Y, то, положив $x = g(y)$, получим $f(x) = f(g(y)) = y$. Таким образом, $f(X) = Y$, и f является сюръекцией. $\square$

Теорема 4.2. (Свойства биекций)

а) если $f: X \to Y$ — биекция, то $f^{-1}: Y \to X$ также биекция;

б) если $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ — биекции, то суперпозиция $g \circ f: X \to Z$ также является биекцией, и в этом случае $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Упражнения

4.1. Пусть функция $f: X \to Y$. Доказать, что

а) f — сюръекция $\Leftrightarrow$ $\forall B \subset Y$ справедливо $f[f^{-1}(B)] = B$;

б) f — инъекция $\Leftrightarrow$ $\forall A \subset X$ справедливо $f^{-1}[f(A)] = A$;

в) f — инъекция $\Leftrightarrow$ $\forall A, B \subset X$ справедливо $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$;

г) f — инъекция $\Leftrightarrow$ $\forall A, B \subset X$ таких, что $B \subset A$ справедливо $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$.

4.2. Доказать теорему 4.2.

4.3. Пусть $f: A \to B$, $g: B \to C$, $h: C \to D$, причем суперпозиции $g \circ f$ и $h \circ g$ — биекции. Доказать, что функции f, g, h также являются биекциями.

4.4. Сколько существует различных биекций из множества $\{x_1, \ldots, x_n\}$ в множество $\{y_1, \ldots y_n\}$?

4.5. Доказать, что между двумя множествами $\{1, 2, \ldots, m\}$ и $\{1, 2, \ldots, n\}$ существует биекция тогда и только тогда, когда $m = n$.

5. Семейства множеств

Пусть зафиксировано множество E и задано еще одно множество Λ, элементы которого будем называть *индексами*. Если для всякого индекса $\lambda \in \Lambda$ определено некоторое подмножество $A_\lambda \subset E$, то говорят, что задано *семейство* множеств $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ с множеством индексов Λ.

Если $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ — семейство множеств, то множество всех $x \in X$, которые являются элементами хотя бы одного множества $A_\lambda (\lambda \in \Lambda)$, называется *объединением* семейства $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ и обозначается $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$.

Символически это определение выглядит так:

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \{x \in E \mid \exists\lambda \in \Lambda\ ,\ x \in A_\lambda\}.$$

Множество элементов $x \in E$, которые принадлежат одновременно всем множествам $A_\lambda (\lambda \in \Lambda)$, называется *пересечением* семейства $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ и обозначается через $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$.

Символически:

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \{x \in E \mid x \in A_\lambda,\ \lambda \in \Lambda\}.$$

Разбиением множества $X \subset E$ называется такое семейство попарно не пересекающихся между собой непустых подмножеств $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, что $X = \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$.

Пример. Пусть задана функция $f : X \to Y$ с конечным множеством значений и $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — все ее попарно различные значения. Обозначим

$$E_k = \{x \in X | f(x) = c_k\}.$$

Тогда множества E_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, образуют разбиение множества X.

Упражнения

5.1. Для всякого числа $\lambda \geq 1$ определим множество

$$\Gamma_\lambda = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < \infty, 0 \leq y \leq x^{-\lambda}\}.$$

Найти множества $\bigcap\limits_{\lambda\geq 1} \Gamma_\lambda$, $\bigcup\limits_{\lambda\geq 1} \Gamma_\lambda$.

5.2. Пусть $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, $\{B_\mu\}_{\mu\in M}$ — два семейства подмножеств множества E. Доказать следующие равенства:

а) $(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda)\cap(\bigcup\limits_{\mu\in M} B_\mu) = \bigcup\limits_{(\lambda,\mu)\in\Lambda\times M}(A_\lambda\cap B_\mu)$;

б) $(\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda)\cup(\bigcap\limits_{\mu\in M} B_\mu) = \bigcap\limits_{(\lambda,\mu)\in\Lambda\times M}(A_\lambda\cup B_\mu)$;

в) $E\setminus\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}(E\setminus A_\lambda)$;

г) $E\setminus\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}(E\setminus A_\lambda)$.

6. Бинарные отношения

1. Пусть X, Y — некоторые множества.

Определение 6.1. *Бинарным отношением между элементами множеств X и Y называется подмножество R в прямом произведении $X\times Y$.*

Если $(x,y)\in R$, то говорят, что x и y *находятся в отношении* R, и пишут xRy.

Областью определения бинарного отношения R называется множество

$$\delta_R = \pi_1 R = \{x\in X \mid \exists y\in Y\ ,\ (x,y)\in R\},$$

а *областью значений* R называется множество

$$\rho_R = \pi_2 R = \{y\in Y \mid \exists x\in X\ ,\ (x,y)\in R\}.$$

Обратным отношением для бинарного отношения R называется множество

$$R^{-1} = \{(y,x)\in Y\times X \mid (x,y)\in R\}.$$

Таким образом, $yR^{-1}x \Leftrightarrow xRy$.

Композицией (или *произведением*) отношений

$$R_1\subset X\times Y \quad \text{и} \quad R_2\subset Y\times Z$$

называется отношение

$$R_1 \circ R_2 = \{(x,z) \in X \times Z \mid \exists y \in Y \ (x,y) \in R_1, (y,z) \in R_2\}.$$

Таким образом, $x(R_1 \circ R_2)z$ равносильно утверждению, что существует такой элемент $y \in Y$, что xR_1y и yR_2z.

Заметим, что понятие функции является частным случаем понятия бинарного отношения, когда оно удовлетворяет дополнительным условиям: $\delta_R = X$ и, если xRy_1 и xRy_2, то $y_1 = y_2$. При этом, если бинарное отношение является функцией, то понятия произведения отношений и обратного отношения соответствуют понятиям суперпозиции функций и обратной функции при условии, что последняя имеет смысл (см. § 3).

Замечание. Отметим, что в случае, когда бинарное отношение R является функцией, обратное отношение R^{-1} — оно всегда существует — может и не быть функцией, и в этом случае обратной функции не существует.

2. Пусть в этом пункте $X = Y$, $R \subset X \times X$ — бинарное отношение на X.

Отношение R называется *рефлексивным*, если xRx для всякого $x \in X$. (Иначе: R рефлексивно, если диагональ $D = \{(x,x) \mid x \in X\} \subset R$).

Отношение R называется *симметричным*, если из xRy следует yRx. (Иначе: R симметрично, если $R = R^{-1}$).

Отношение R называется *антисимметричным*, если из xRy и yRx следует $x = y$ (то есть $R \cap R^{-1} \subset D$).

Отношение R называется *транзитивным*, если из xRy и yRz следует xRz (равносильно: $R \circ R \subset R$).

Рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение на X называется *эквивалентностью* на X.

Если R — эквивалентность на X и xRy, то элементы x и y называются *эквивалентными* (относительно эквивалентности R).

3. Фундаментальное свойство отношения эквивалентности на множестве X состоит в том, что оно позволяет установить разби-

ение множества X на части, называемые классами эквивалентности.

Пусть R — эквивалентность на X.

Классом эквивалентности R называют подмножество A в X, образованное всеми элементами из X, эквивалентными некоторому заданному элементу x.

Любые два класса эквивалентности либо совпадают, либо не пересекаются (докажите это!). Так как для эквивалентности R имеем $\delta_R = X$, то объединение всех различных классов эквивалентности совпадает с X. Итак, имеет место следующее утверждение.

Теорема 6.1. (Теорема о разбиении). *Пусть R — эквивалентность на X. Тогда множество всех классов эквивалентности представляет собой разбиение множества X.*

Множество всех классов эквивалентности множества X относительно эквивалентности R называется *фактор-множеством* X по R и обозначается через X/R.

Упражнения

6.1. Найти δ_R, ρ_R, R^{-1}, $R \circ R$ для отношений:

а) $R = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{N} \quad x \quad y\}$;

б) $R = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R} \quad x + y \leq 0\}$;

в) $R = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R} \quad |x - y| < \varepsilon\}$.

6.2. Построить бинарное отношение

а) рефлексивное, симметричное, но не транзитивное;

б) рефлексивное, антисимметричное и не транзитивное;

в) рефлексивное, не симметричное и транзитивное;

г) не рефлексивное, антисимметричное и транзитивное;

д) не рефлексивное, симметричное и транзитивное.

6.3. Доказать, что если R — симметричное, транзитивное отношение на X и $\delta_R \cup \rho_R = X$, то R — эквивалентность на X.

6.4. Являются ли следующие отношения эквивалентностями:

а) сравнимость по модулю фиксированного натурального числа в $\mathbb{N}$;

б) перпендикулярность прямых в $\mathbb{R}^2$;

в) параллельность прямых в $\mathbb{R}^2$;

г) $R = \{((a,b),(c,d)) | (a,b),(c,d) \in \mathbb{N}^2 \quad ad = bc\}$?

6.5. Пусть R_1, R_2 — эквивалентности на X. Доказать, что $R_1 \circ R_2$ является эквивалентностью тогда и только тогда, когда $R_2 \circ R_1 = R_1 \circ R_2$.

6.6. Доказать, что симметричное и антисимметричное отношение транзитивно.

6.7. Доказать теорему о разбиении.

7. Мощность множества

Пусть X, Y — множества. Множество X называется *эквивалентным* множеству Y, если существует биекция $f\colon X \to Y$. (Обозначение $X \sim Y$). Отношение «$\sim$» обладает следующими свойствами:

1°. $X \sim X$ для любого множества X (рефлексивность);

2°. Если $X \sim Y$, то $Y \sim X$ (симметричность);

3°. Если $X \sim Y$ и $Y \sim Z$, то $X \sim Z$ (транзитивность).

Введенное бинарное отношение между множествами является отношением эквивалентности (см. § 6). Применяя теорему о разбиении из § 6, получим следующее утверждение.

Теорема 7.1. *Все множества разбиваются на классы эквивалентности так, что множества из одного класса попарно эквивалентны, а любые два множества из разных классов не эквивалентны между собой.*

Мы можем каким-либо символом обозначить свойство множества X принадлежать определенному классу эквивалентности (например, символом, обозначающим класс эквивалентности, которому принадлежит множество X). Этот символ называется *мощностью* множества X. Для обозначения мощности множества X мы будем использовать символ $|X|$.

Таким образом, если $X \sim Y$, то $|X| = |Y|$.

Пример 1. Любые два интервала в $\mathbb{R}$ равномощны. Для доказательства этого утверждения достаточно показать, что $(0,1) \sim (a,b)$ для $a < b$. Одной из биекций, устанавливающих эквивалентность интервалов $(0,1)$ и (a,b), является функция $f(x) = a + (b-a)x,\ x \in (0,1)$ (рис. 6).

Аналогично доказывается, что любые два отрезка в $\mathbb{R}$ равномощны.

Множество $\{1, 2, \dots, n\}$ будем называть отрезком натурального ряда.

Определение 7.1. *Множество называется конечным, если оно эквивалентно отрезку натурального ряда.*

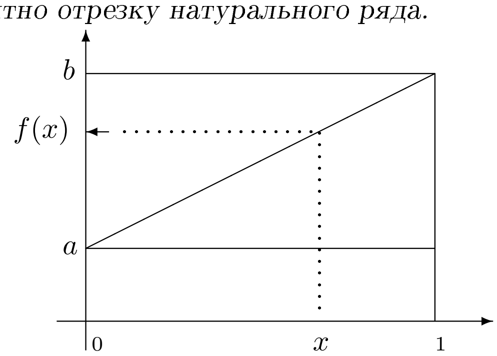


Рис. 6

Из этого определения и задачи 4.5 следует, что два конечных множества эививалентны тогда и только тогда, когда они эквивалентны одному и тому же отрезку натурального ряда $\{1, 2, \dots, n\}$. Значит, число n, которое мы привыкли называть количеством элементов этого отрезка, однозначно определяется классом множеств, содержащим этот отрезок, и может быть принято в качестве мощности конечного множества. Итак, мощность конечного множества — это и есть количество его элементов:

$$|\{x_1, x_2, \dots, x_n\}| = n.$$

Для установления равенства мощностей двух множеств X и Y бывает полезной следующая теорема.

Теорема 7.2. (Э. Шредер — Ф. Бернштейн.) *Если* $X_1 \subset X$, $Y_1 \subset Y$ *и* $X_1 \sim Y$, *а* $Y_1 \sim X$, *то* $X \sim Y$.

Доказательство этой теоремы можно найти в [2].

Пример 2. Покажем, что $(0,1) \sim [0,1]$.

Пусть $X = (0,1)$, $Y = [0,1]$, $X_1 = [\varepsilon, 1-\varepsilon]$ $(0 < \varepsilon < \frac{1}{2})$, $Y_1 = (0,1)$. Тогда $X \sim Y_1$, и, в силу примера 1, имеем $X_1 \sim Y$. На основании теоремы Шредера — Бернштейна, $X \sim Y$.

Упражнения

7.1. Построив биекцию, доказать равномощность следующих множеств:

а) интервала (0,1) и числовой прямой $\mathbb{R}$;

б) отрезка [0,1] и полуинтервала (0,1];

в) отрезка [0,1] и интервала (0,1);

г) открытого и замкнутого единичных кругов:

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < 1\}$ $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$;

д) сферы с выколотой точкой и плоскости;

е) открытого единичного круга и дополнения к замкнутому единичному кругу;

ж) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ и множества всех прямых на плоскости, не проходящих через начало координат;

з) множества всех подмножеств множества X и множества всех функций вида $f : X \to \{0,1\}$.

7.2. Пусть $X = X_1 \times X_2$, $Y = Y_1 \times Y_2$, причем $X_1 \sim Y_1$, $X_2 \sim Y_2$. Доказать, что $X \sim Y$.

7.3. Пусть $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ и $\{Y_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ — разбиения множеств X и Y соответственно. Доказать, что если $X_\lambda \sim Y_\lambda$ для любого $\lambda \in \Lambda$, то $X \sim Y$.

7.4. Доказать, что если $|X \setminus Y| = |Y \setminus X|$, то $|X| = |Y|$.

7.5. Доказать, что если $A \subset B$, $|A| = |A \cup C|$, то $|B| = |B \cup C|$.

7.6. Доказать, что если $A \subset C$, $B \subset D$, $|A \cup D| = |A|$, то $|C \cup B| = |C|$.

7.7. Верно ли, что из $A \subset C$, $B \subset C$, $|A| = |B|$ следует $|C \setminus A| = |C \setminus B|$?

7.8. Верно ли, что из $C \subset A$, $C \subset B$, $|A| = |B|$ следует $|A \setminus C| = |B \setminus C|$?

8. Сравнение мощностей

В этом параграфе увидим, что существуют неравномощные бесконечные множества, и что различные мощности множеств можно сравнивать между собой.

1. Пусть X, Y — множества. Логически возможны четыре взаимоисключающие друг друга ситуации:

1) множество X содержит часть X_1, эквивалентную множеству Y, а множество Y содержит часть Y_1, эквивалентную множеству X;
2) множество X содержит часть $X_1 \sim Y$, но никакая часть Y не эквивалентна X;
3) множество Y содержит часть $Y_1 \sim X$, но никакая часть X не эквивалентна Y;
4) никакая часть X не эквивалентна Y, и никакая часть Y не эквивалентна X.

В случае 1), в силу теоремы Шредера—Бернштейна, $X \sim Y$, то есть $|X| = |Y|$.

Если складывается ситуация 2), то, по определению, считают, что мощность множества X *больше* мощности Y, и записывают это отношение в виде $|X| > |Y|$.

Следовательно, в ситуации 3) имеем $|X| < |Y|$.

Можно доказать, что случай 4) невозможен (см., например, [2, гл. 14].

Таким образом, для любых двух множеств X и Y возможен один и только один из трех случаев: 1) $|X| = |Y|$, 2) $|X| > |Y|$, 3) $|X| < |Y|$.

Будем писать $|X| \geq |Y|$, если $|X| > |Y|$ или $|X| = |Y|$. Другими словами,

$|X| \geq |Y|$ *тогда и только тогда, когда* X *содержит часть* X_1, *эквивалентную* Y.

Теперь теорему Шредера — Бернштейна можно записать в следующей форме.

Теорема 8.1. (Теорема Шредера — Бернштейна.) *Если* $|X| \geq |Y|$ *и* $|Y| \geq |X|$, *то* $|X| = |Y|$.

2. Убедимся, что существуют бесконечные множества различной мощности. Более того, оказывается, что для любого множества X можно найти такое множество Y, что $|Y| > |X|$.

Для множества X через $P(X)$ обозначим множество всех его частей, то есть $A \in P(X)$, если $A \subset X$. В часности, $\emptyset$ и $X \in P(X)$.

Теорема 8.2. (Г. Кантор.) $|P(X)| > |X|$.

Доказательство. Прежде всего отметим, что $|P(X)| \geq |X|$. Это следует из того, что $X \sim \{\{x\} \in P(X) \mid x \in X\} \subset P(X)$, то есть каждому элементу x множества X можно поставить в соответствие одноэлементное множество $\{x\}$ из $P(X)$.

Далее доказываем от противного. Допустим, что $|X| \geq |P(X)|$. Тогда из теоремы Шредера — Бернштейна следует, что $|X| = |P(X)|$, то есть существует биекция $\varphi: X \to P(X)$. Обозначим через множество $S = \{x \in X \mid x \notin \varphi(x)\}$, и пусть $y = \varphi^{-1}(S)$. Следовательно, $\varphi(y) = S$.

Если $y \notin S$, то из определения множества S следует, что $y \in S$. Если же $y \in S = \varphi(y)$, то, опять-таки, по определению множества S имеем $y \notin S$.

Полученное противоречие показывает, что $|X| \neq |P(X)|$, и теорема доказана. □

Если X — конечное множество и $|X| = n$, то $|P(X)| = 2^n$ (см. упр. 8.5). По аналогии с конечными множествами дадим определение символа $2^{|X|}$: для любого множества X

$$2^{|X|} \stackrel{def}{=} |P(X)|.$$

Теперь теорема 8.2 Г. Кантора говорит: $2^{|X|} > |X|$.

Упражнения

8.1. Доказать, что если $|X| \geq |Y|$, то существует сюръекция $f\colon X \to Y$.

8.2. Доказать, что если существует сюръекция $f\colon X \to Y$, то $|X| \geq |Y|$.

8.3. Доказать, что если существует инъекция $f\colon X \to Y$, то существует сюръекция $g\colon Y \to X$, и следовательно, в этом случае $|X| \leq |Y|$.

8.4. Доказать, что если $|X| \leq |Y|$, $|Y| \leq |Z|$, то $|X| \leq |Z|$.

8.5. Пусть X — конечное множество и $|X| = n$. Доказать, что $|P(X)| = 2^n$.

8.6. Доказать, что если $|X_1| \leq |Y_1|$, $|X_2| \leq |Y_2|$, то $|X_1 \times X_2| \leq |Y_1 \times Y_2|$.

8.7. Доказать, что мощность множества всех вещественных функций на отрезке [0,1] больше мощности множества точек этого отрезка.

8.8. Пусть X, Y — множества. Через Y^X обозначается множество всех функций вида $f\colon X \to Y$. Доказать, что если $|Y| \geq 2$, то $|Y^X| > |X|$.

8.9. Доказать, что мощность множества точек отрезка [0,1] равна $2^{|\mathbb{N}|}$.

9. Счетные множества

Определение 9.1. *Множество называется счетным, если оно эквивалентно множеству всех натуральных чисел.*

Иначе говоря, множество A счетно, если все его элементы можно перенумировать, то есть расположить в виде последовательности:

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

Мощность счетного множества обозначим символом $\boldsymbol{a}$.

Счетные множества занимают особое место среди бесконечных множеств, а именно: они обладают наименьшей мощностью среди бесконечных множеств. Этот факт выражается в следующей теореме.

Теорема 9.1. *Любое подмножество счетного множества либо конечно, либо счетно. Любое бесконечное множество содержит счетное подмножество.*

Доказательство этой теоремы можно найти в [3].

Теорема 9.1, как уже было сказано выше, утверждает, что если множество A имеет мощность, которая меньше, чем $\boldsymbol{a}$, то оно конечно. Меньшую мощность может иметь лишь конечное множество. Поэтому, если множество A либо конечно, либо счетно, то его называют «не более чем счетным».

Лемма 9.1. $|\mathbb{N}^2| = \boldsymbol{a}$.

Доказательство. Расположим множество

$$\mathbb{N}^2 = \{(m,n) | m, n \in \mathbb{N}\}$$

в виде бесконечной матрицы и будем нумеровать элементы матрицы, начиная с элемента (1,1), последовательно переходя от пар (m,n) на одной диагонали, где $m+n$ постоянно, к парам следующей диагонали, где эта сумма на 1 больше, как показано на рис. 7. Видно, что каждый элемент матрицы получит номер.

$$\begin{array}{lll}
(1,1) & (1,2) & (1,3) \ldots \\
(2,1) & (2,2) & (2,3) \ldots \\
(3,1) & (3,2) & (3,3) \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

Рис. 7

Таким образом, вся матрица может быть записана в виде последовательности, и потому она состоит из счетного множества элементов. □

Следствие. *Для любого m имеем эквивалентность* $\mathbb{N}^m \sim \mathbb{N}$.

Доказательство. Утверждение методом индукции выводится из леммы 9.1 и упражнения 7.2. □

Теорема 9.2. *Объединение не более чем счетного множества не более чем счетных множеств есть множество не более чем счетное.*

Доказательство. Пусть $A = \bigcup\limits_{n \in \Lambda} A_n$, где $\Lambda \subset \mathbb{N}$, и обозначим мощность множества A_n через α_n для любого $n \in \Lambda$. Учтите, что здесь n пробегает не все натуральные числа, а лишь попавшие в множество индексов Λ. По условию теоремы, $\alpha_n \leq \boldsymbol{a}$ и $|\Lambda| \leq \boldsymbol{a}$. Тогда, в силу упражнения 8.1, для каждого $n \in \Lambda$ найдутся сюръекции $f_n \colon \mathbb{N} \to A_n$ и $\varphi : \mathbb{N} \to \Lambda$. Построим функцию

$$g(p,q) : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to A$$

следующим образом: $g(p,q) = f_{\varphi(p)}(q)$. Это значит, что мы при помощи отображения φ по числу p находим номер $n = \varphi(p) \in \Lambda$ слагаемого в сумме, образующей множество A, а затем по числу q при помощи отображения f_n находим элемент в слагаемом A_n. Так как f_n и φ — сюръекции, то g — сюръекция. Поэтому, в силу упражнения 8.2, $|A| \leq |\mathbb{N}^2| = |\mathbb{N}|$, то есть множество A не более чем счетно. Теорема доказана. □

Пример. Множество алгебраических чисел

Определение 9.2. *Комплексное число называется алгебраическим, если оно является корнем некоторого многочлена с целыми коэффициентами.*

Множество всех алгебраических чисел обозначим через $\mathbb{A}$.

Теорема 9.3. *Множество $\mathbb{A}$ счетно.*

Доказательство. Нетрудно проверить, что множество $\mathbb{Z}$ всех целых чисел счетно (см. упр. 9.1). При помощи метода индукции и упражнения 7.2 получим, что для любого $n \in \mathbb{N}$ множество $\mathbb{Z}^n$ является счетным.

Каждому многочлену степени n с целыми коэффициентами однозначно сопоставим целую точку $(n+1)$-мерного пространства, координатами кототрой являются эти коэффициенты. Таким образом, если $\mathcal{P}_n$ — множество всех таких многочленов, то

$$\mathcal{P}_n \sim \mathbb{Z}^{n+1},$$

и, следовательно, $|\mathcal{P}_n| = \boldsymbol{a}$ для всякого $n \in \mathbb{N}$.

Обозначим теперь через $R(P_n)$ множество корней многочлена $P_n \in \mathcal{P}_n$ и через $\mathbb{A}_n$ — множество всех корней всех многочленов из $\mathcal{P}_n$. Тогда

$$\mathbb{A}_n = \bigcup_{P_n \in \mathcal{P}_n} R(P_n),$$

и так как $|R(P_n)| \leq n$, то, в силу теоремы 9.2, имеем $|\mathbb{A}_n| \leq \boldsymbol{a}$. Далее

$$\mathbb{A} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{A}_n,$$

и опять по теореме 9.2 получаем, что $|\mathbb{A}| < \boldsymbol{a}$, а так как очевидно, что множество $\mathbb{A}$ бесконечно, то $|\mathbb{A}| = \boldsymbol{a}$. $\square$

Упражнения

9.1. Доказать, что множество $\mathbb{Z}$ всех целых чисел счетно.

9.2. Доказать, что множество $\mathbb{Q}$ всех рациональных чисел счетно.

9.3. Какова мощность множества всех конечных десятичных дробей?

9.4. Какова мощность множества всех конечных подмножеств счетного множества?

9.5. Какова мощность множества всех треугольников на плоскости, вершины которых имеют рациональные координаты?

9.6. Какова мощность множества окружностей на плоскости, у которых радиусы и координаты центра — рациональные?

9.7. Пусть ε — положительное число и на плоскости задано такое множество A, что расстояние между любыми двумя его точками больше, чем ε. Доказать, что A не более чем счетно.

9.8. Доказать, что монотонная функция на числовой прямой имеет не более чем счетное множество точек разрыва.

9.9. Пусть множество A — бесконечное , а B — не более чем счетное. Доказать, что $|A \cup B| = |A|$.

9.10. Пусть множества A, B таковы, что $|A| > \boldsymbol{a}$, $|B| \leq \boldsymbol{a}$. Доказать, что $|A \setminus B| = |A|$.

9.11. Пусть X — множество, причем $2^{|X|} \geq \boldsymbol{a}$. Доказать, что $2^{|X|} \geq 2^{\boldsymbol{a}}$.

9.12. Пусть X, Y — множества и $|Y| \geq 2$. Доказать, что если $|Y^X| = \boldsymbol{a}$, то $|Y| = \boldsymbol{a}$ и X — конечно.

10. Мощность континуума

Множество

$$I = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$$

называется *континуумом*. Множество, эквивалентное континууму, называется множеством *мощности континуума* или континуальным множеством. Мощность континуума будем обозначать буквой $\boldsymbol{c}$.

Теорема 10.1. $\boldsymbol{c} > \boldsymbol{a}$ *(континуум несчетен).*

Доказательство. Докажем теорему методом от противного, то есть предположим, что $\boldsymbol{c} \leq \boldsymbol{a}$.

В виду того, что
$$\mathbb{N} \sim \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \subset I,$$
имеем $\boldsymbol{a} \le \boldsymbol{c}$. Следовательно, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}$. Значит, множество I счетно, поэтому может быть записано в виде последовательности:
$$I = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}.$$
Каждое число x_n можно записать в виде десятичной дроби
$$x_n = 0, a_1^{(n)} a_2^{(n)} \ldots,$$
причем числа $a_m^{(n)}$ принимают значения из множества $\{0, 1, \ldots, 9\}$. Определим вещественное число $x \in I$ как число с десятичным представлением
$$x = 0, b_1 b_2 b_3 \ldots,$$
причем
$$b_n = \begin{cases} 1, & \text{если } a_n^{(n)} \ne 1; \\ 2, & \text{если } a_{nn} = 1. \end{cases}$$
Десятичное представление числа x не совпадает с десятичным представлением любого x_n, так как на n-ом месте в их десятичном представлении стоят разные цифры. Тогда число x не совпадает ни с одним из чисел x_n.

Действительно, если бы оказалось, что существует число $x_n = x$, но, как мы видели, с различными десятичными представлениями, то это означало бы, что существует такое натуральное число k, что если $i < k$, то $a_i^{(n)} = b_i$, $|a_k^{(n)} - b_k| = 1$, и если $i > k$, то либо $a_i^{(n)} = 0$, а $b_i = 9$, либо наоборот. Однако b_i вообще не принимает значений 0 и 9. Так что эти два числа не могут совпадать.

Итак, мы получили, что, с одной стороны, $x \in I$, но среди членов последовательности x_n, представляющей множество I, этого числа не нашлось. Таким образом, получено противоречие с предположением о счетности континуума, и теорема доказана. □

Пример 1. Из упражнения 7.1 следует, что множество всех вещественных чисел $\mathbb{R}$ и произвольный промежуток с концами a, b, $a < b$, имеют мощность континуума.

Пример 2. Так как множества $\mathbb{Q}$ всех рациональных чисел и $\mathbb{A}$ всех алгебраических чисел счетны (см. пример § 9 и упражнение 9.2), то, в силу упражнения 9.10, множество $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ всех иррациональных чисел и множество $\mathbb{R} \setminus \mathbb{A}$ всех трансцендентных чисел континуальны.

Теорема 10.2. *$I^2 = I \times I \sim I$.*

Доказательство. Известно, что всякое число полуинтервала (0,1] можно однозначно представить в виде бесконечной десятичной дроби, то есть такой дроби, которая имеет бесконечное множество знаков, отличных от 0. Множество, состоящее из всех бесконечных десятичных дробей, представляющих числа из полуинтервала (0,1] и дроби 0,000..., обозначим через T. Таким образом, $T \sim I$.

Построим функцию

$$f{:}\, T \to I^2$$

следующим образом. Пусть $x \in T$ и $x = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots$, а y и z — числа из I, имеющие разложения в десятичные дроби

$$y = 0, a_1 a_3 a_5 \ldots,$$
$$z = 0, a_2 a_4 a_6 \ldots$$

Дроби для y и z могут получиться и конечные, но в данном случае это не существенно, так как под y и z как элементами множества I мы понимаем не дроби, а числа, ими представляемые. Итак, положим

$$f(x) = (y, z) \in I^2.$$

Докажем, что f — сюръекция. Действительно, пусть $y, z \in I$ и имеют десятичные представления

$$y = 0, b_1 b_2 b_3 \ldots,$$
$$z = 0, c_1 c_2 c_3 \ldots,$$

причем дроби всегда можно выбрать бесконечными[2] (кроме случая $y = z = 0$), и положим

$$x = 0, b_1 c_1 b_2 c_2 b_3 c_3 \ldots$$

Эта дробь либо бесконечная, либо состоит из одних нулей, и потому $x \in T$, причем $f(x) = (y, z)$.Таким образом, $f(T) = I^2$.

В силу упражнения 8.2 имеем $|I^2| \leq |\ T\ |$, а так как $T \sim I \sim I \times \{0\} \subset I^2$, то $|T| \leq |I^2|$.

Для завершения доказательства теоремы остается применить теорему Шредера — Бернштейна (см. § 7). $\square$

Пример 3. Так как $I \sim \mathbb{R}$, то в силу упражнения 7.2 имеем $I^2 \sim \mathbb{R}^2$, и следовательно, $|\mathbb{R}^2| = \boldsymbol{c}$. Применяя метод математической индукции, легко получаем, что $|\mathbb{R}^n| = \boldsymbol{c}$ для любого натурального n.

Аналогично рассуждениям, приведенным в примере 3, доказывается следующее утверждение.

Теорема 10.3. *Пусть $\emptyset \neq \Lambda \subset \mathbb{R}$ и имеется семейство множеств $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, причем $|A_\lambda| = \boldsymbol{c}$ для каждого $\lambda \in \Lambda$. Тогда мощность множества $A = \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ равна $\boldsymbol{c}$.*

Упражнения

10.1. Какова мощность множества всех двоичных дробей вида

$$0, a_1 a_2 a_3 \ldots,$$

где a_i либо 0, либо 1?

10.2. Какова мощность множества всех возрастающих последовательностей натуральных чисел?

10.3. Какова мощность множества всех последовательностей натуральных чисел?

---

[2]Конечную дробь всегда можно заменить бесконечной, представляющей то же число.

10.4. Какова мощность множества всех частей $\mathbb{N}$?

10.5. Какова мощность канторова множества P_0?

Замечание. Канторово множество P_0 строится следующим образом: из отрезка $[0, 1]$ удаляется интервал $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$; из оставшихся двух отрезков вновь удаляются их открытые средние трети и так далее. Оставшееся после счетного множества таких операций множество и есть P_0.

10.6. Какова мощность множества чисел отрезка [0,1], в разложении которых в бесконечную троичную дробь отсутствует цифра 1?

10.7. Какова мощность множества чисел отрезка [0,1], в разложении которых в бесконечную десятичную дробь отсутствует цифра 5?

10.8. Какова мощность множества чисел отрезка [0,1], в разложении которых в бесконечную десятичную дробь есть цифра 5?

10.9. Какова мощность множества всех отрезков на числовой прямой?

10.10. Какова мощность множества всех прямых, лежащих в плоскости?

10.11. Доказать что мощность множества всех конечных частей множества мощности $\boldsymbol{c}$ равна $\boldsymbol{c}$.

10.12. Какова мощность множества всех непрерывных функций, заданных на отрезке [0,1].

10.13. Какова мощность множества всех бесконечных сходящихся последовательностей вещественных чисел?

10.14. Какова мощность множества всех бесконечных последовательностей вещественных чисел?

Библиографический список

[1] Зорич В. А. *Математический анализ.* Т. 1. М.: Наука, 1981.

[2] Натансон И. П. *Теория функций вещественной переменной.* М.: Наука, 1974.

[3] Дьедонне Ж. *Основы современного анализа.* М.: Мир, 1964.

[4] Александров П. С. *Введение в теорию множеств и общую топологию.* М.: Наука, 1977.

[5] Очан Ю. С. *Сборник задач по математическому анализу.* М.: Просвещение, 1981.

[6] Лавров И. А., Максимова Л. Л. *Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов.* М.: Наука, 1975.

[7] Sierpinski W. *Cardinal and ordinal numbers.* Warszawa, 1965.

[8] Широков Б. М. *Теоретическая арифметика.* Петрозаводск: ПетрГУ, 1997.

Содержание

Учебное издание

Широков Борис Михайлович
Шестаков Владимир Александрович

Теория множеств

Учебное пособие

Верстка: Б. М. Широков
Редактор А. В. Ермашова

Подписано в печать 07.06.2013. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Уч.-изд. л. 1,8. Тираж 170 экз. Изд. № 42.
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

Петрозаводский государственный университет

Отпечатано в типографии Издательства ПетрГУ
185910, Петрозаводск, пр. Ленина, 33.