Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего профессионального образования
ПЕТРОЗАВОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Е. Г. Ганенкова, К. Ф. Амозова

ЗАДАЧИ ПО ФУНКЦИОНАЛЬНОМУ АНАЛИЗУ

*Учебное пособие
для студентов
математического факультета*

Публикуется при финансовой поддержке Программы стратегического развития ПетрГУ в рамках реализации комплекса мероприятий по развитию образовательной деятельности

Петрозаводск
Издательство ПетрГУ
2012

Оглавление

Введение

Пособие содержит теоретический материал, задачи и упражнения по некоторым разделам курса «Функциональный анализ».

Отметим, что задачи по функциональному анализу довольно специфичны. Многие из них требуют изобретательности, особого подхода, глубоких знаний и функционального анализа, и смежных дисциплин (теории множеств, математического анализа и пр.). Сложность добавляет и абстрактность самого курса. Пособие ориентировано на «среднего» студента математического факультета. Мы постарались включить в него задачи и упражнения, доступные для самостоятельного решения, которые помогли бы разобраться в основных понятиях и методах функционального анализа.

Пособие состоит из двух глав. В первой речь идет об основных классах пространств: метрических, линейных нормированных и гильбертовых. Вторая посвящена одному из наиболее важных понятий функционального анализа — линейным операторам. В начале каждого параграфа излагаются основные понятия и теоретические сведения, необходимые для выполнения упражнений, а также предложены примеры решения типовых задач (если таковые по данной теме имеются). Все вычислительные и некоторые другие задачи снабжены ответами.

Часть упражнений, предложенных в пособии, заимствована из [1]–[9], многие из них подверглись обработке, часть задач составлена авторами.

Пособие предназначено для студентов классических университетов, обучающихся по специальностям «Математика» и «Прикладная математика».

Авторы выражают благодарность П. А. Бородину, С. Р. Насырову и Б. М. Широкову за помощь, важные и полезные замечания при подготовке данного пособия.

Глава 1. Основные классы пространств

1.1. Метрические пространства

Пусть X — произвольное множество. На этом множестве можно ввести понятие расстояния.

Отображение $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ называется **метрикой**, если для любых $x, y, z \in X$ оно удовлетворяет следующим условиям (аксиомам метрики):

M1) $\rho(x, y) \geq 0$; $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (аксиома тождества);

M2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (аксиома симметрии);

M3) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (неравенство треугольника).

Пара (X, ρ) называется **метрическим пространством**, а число $\rho(x, y)$ — **расстоянием** между элементами x и y.

Список основных метрических пространств приведен в приложении 1.

Задачи

1.1. Доказать, что аксиомы метрического пространства эквивалентны следующим:

1) $\rho(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$;

2) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(y, z) \quad \forall\, x, y, z \in X$.

1.2. Доказать, что для любых элементов x, y, z, t метрического пространства (X, ρ) справедливы неравенства:

1) $|\, \rho(x, z) - \rho(y, z)| \leq \rho(x, y)$ (второе неравенство треугольника);

2) $|\, \rho(x, z) - \rho(y, t)| \leq \rho(x, y) + \rho(z, t)$ (неравенство четырехугольника).

1.3. Проверить аксиомы метрики в пространствах из приложения 1.

1.4. Является ли метрическим пространством множество непрерывных на отрезке $[a;b]$ функций с определенным на нем отображением $\rho(x,y) = |x(t_0) - y(t_o)|$, где t_0 — фиксированная точка отрезка $[a;b]$.

1.5. Показать, что в пространстве B_0 неравенство треугольника выполняется в усиленной форме

$$\rho(x,z) \leq \max\{\rho(x,y), \rho(y,z)\}.$$

1.6. Доказать, что если $\rho(x,y) \neq \rho(y,z)$ в пространстве B_0, то $\rho(x,z) = \max\{\rho(x,y), \rho(y,z)\}$.

1.7. Пусть X – множество всех точек единичной окружности, $\rho(x,y)$ – длина кратчайшей дуги окружности, соединяющей x и y. Является ли (X,ρ) метрическим пространством?

1.8. Рассмотрим множества:

а) X_1 всех прямых вида $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$, α, p – любые вещественные числа;

б) X_2 всех прямых вида $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$, p – любое вещественное число, $\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Для двух прямых

$$L_1: \ x\cos\alpha_1 + y\sin\alpha_1 - p_1 = 0,$$

$$L_2: \ x\cos\alpha_2 + y\sin\alpha_2 - p_2 = 0$$

определим отображение

$$\rho(L_1, L_2) = |p_1 - p_2| + |\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2|.$$

Являются ли пары (X_1, ρ) и (X_2, ρ) метрическими пространствами?

1.9. Пусть пространство X с введенным на нем отображением ρ не является метрическим, $X_0 \subset X$. Может ли пара (X_0, ρ) быть метрическим пространством?

1.10. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Доказать, что отображения:

1) $\rho_1(x, y) = \dfrac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)}$,

2) $\rho_2(x, y) = \min\{\rho(x, y), 1\}$,

3) $\rho_3(x, y) = \ln(1 + \rho(x, y))$

являются метриками в X.

1.11. Пусть $Z = X \times Y$, $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$ — элементы Z, (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) — метрические пространства. Доказать, что отображения:

1) $\rho_1(z_1, z_2) = \rho_X(x_1, x_2) + \rho_Y(y_1, y_2)$,

2) $\rho_2(z_1, z_2) = \max\{\rho_X(x_1, x_2), \rho_Y(y_1, y_2)\}$

являются метриками в Z.

1.12. Говорят, что метрика ρ, введенная на линейном пространстве X, обладает свойствами:

а) *инвариантности относительно сдвига*, если для любых $x, y, z \in X$ выполняется равенство

$$\rho(x + z, y + z) = \rho(x, y);$$

б) *абсолютной однородности*, если для любых $x, y \in X$ и любой константы $\lambda \in \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) верно

$$\rho(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| \rho(x, y).$$

Привести пример метрики:

а) удовлетворяющей свойствам инвариантности относительно сдвига и абсолютной однородности;

б) удовлетворяющей свойству инвариантности относительно сдвига, но не обладающей свойством абсолютной однородности;

в) удовлетворяющей свойству абсолютной однородности, но не обладающей свойством инвариантности относительно сдвига;

г) не удовлетворяющей свойствам инвариантности относительно сдвига и абсолютной однородности.

1.13. Каким условиям должна удовлетворять определенная на $\mathbb{R}$ непрерывная функция $u = f(v)$, чтобы на $\mathbb{R}$ можно было задать метрику равенством

$$\rho(x, y) = |f(x) - f(y)|?$$

1.14 Между реками (непрерывными кривыми на плоскости, содержащими концы) Γ_1 и Γ_2 нужно построить канал (отрезок). Естественно предположить, что расстояние между реками — длина самого короткого из возможных каналов, то есть

$$\rho(\Gamma_1, \Gamma_2) = \min_{\substack{x \in \Gamma_1, \\ y \in \Gamma_2}} |x - y|.$$

Задает ли это правило метрику на множестве всех рек?

1.15 *Хаусдорфова метрика.*

Пусть имеются две дороги (непрерывными кривыми на плоскости, содержащими концы) Γ_1 и Γ_2. По дорогам движется машина (точка), поливающая их. Будем считать что машина поливает вокруг себя площадь замкнутого круга, причем радиус полива можно менять. Найдем наименьший радиус, при котором при движении машины по одной из дорог будут политы обе.

Рассмотрим сначала случай, когда машина едет по дороге Γ_1. Чтобы полить фиксированную точку $y \in \Gamma_2$ нужно установить радиус полива (он будет наименьшим):

$$R(y) = \min_{x \in \Gamma_1} |x - y|.$$

Чтобы полить все точки y на Γ_2 необходимо взять наибольший из радиусов $R(y)$:

$$R_1(\Gamma_1, \Gamma_2) = \max_{y \in \Gamma_2} \min_{x \in \Gamma_1} |x - y|.$$

Аналогично, чтобы полить дорогу Γ_1 машине, идущей по Γ_2, необходимо выбрать радиус полива

$$R_2(\Gamma_1, \Gamma_2) = \max_{y \in \Gamma_1} \min_{x \in \Gamma_2} |x - y|.$$

Наконец, обе дороги будут политы при движении машины по одной из дорог, если взять радиус

$$\rho(\Gamma_1, \Gamma_2) = \max \left\{ \max_{y \in \Gamma_2} \min_{x \in \Gamma_1} |x - y|, \max_{y \in \Gamma_1} \min_{x \in \Gamma_2} |x - y| \right\}.$$

Это отображение называется *Хаусдорфовой метрикой.*

1) Проверить, что отображение $\rho(\Gamma_1, \Gamma_2)$ является метрикой.

2) Являются ли метриками на заданном множестве кривых отображения $R_1(\Gamma_1, \Gamma_2)$ и $R_2(\Gamma_1, \Gamma_2)$?

3) Будет ли отображение $\rho(\Gamma_1, \Gamma_2)$ метрикой на множестве всех непрерывных кривых на плоскости конечной длины (концы кривой могут ей не принадлежать)?

1.16 Является ли метрикой заданное на множестве $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ отображение: для $x, y \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ пусть $\rho(x, y)$ — число целых точек, лежащих на отрезке $[x, y]$, минус один?

1.2. Нормированные пространства

Пусть X — линейное пространство над числовым полем $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{R}$). Отображение $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ называется **нормой**, если для любых $x, y \in X$ и $\lambda \in \mathbb{K}$ оно удовлетворяет условиям (аксиомы нормы):

N1) $\|x\| \geq 0$; $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$ — нулевой элемент пространства X (аксиома тождества);

N2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ (абсолютная однородность);

N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника).

Пара $(X, \|\cdot\|)$ называется **линейным нормированным пространством** или (для краткости) нормированным пространством.

Любое нормированное пространство становится метрическим, если в нем задать метрику формулой

$$\rho(x, y) = \|x - y\|.$$

Введенная таким образом метрика обладает свойствами:

1^0) инвариантности относительно сдвига: $\forall\, x, y, z \in X$ выполняется равенство

$$\rho(x + z, y + z) = \rho(x, y);$$

2^0) абсолютной однородности: для любых $x, y \in X$ и любой константы λ верно

$$\rho(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| \rho(x, y).$$

Если на линейном пространстве X введена метрика ρ, обладающая свойствами инвариантности относительно сдвига и абсолютной однородности, то X является и нормированным пространством: норму можно задать равенством $\|x\| = \rho(x, \theta)$.

Нормы $\|x\|_1$ и $\|x\|_2$ в линейном пространстве X называются **эквивалентными**, если существуют такие числа $\alpha > 0$, $\beta > 0$, что для любого $x \in X$ выполняется неравенство $\alpha\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1$.

Список основных нормированных пространств приведен в приложении 2.

Пример. *Показать, что отображение*

$$\|x\| = \max_{t \in [a;\ b]} |x(t)|$$

определяет норму в пространстве $C[a;b]$.

Решение. Каждой функции $x(t)$ пространства $C[a;b]$ отображение $\|\cdot\|$ ставит в соответствие вещественное число $\max\limits_{t\in[a;b]}|x(t)|$ (этот максимум существует в силу теоремы Вейерштрасса). Проверим выполнимость аксиом нормы.

N1) Так как $|x(t)|\geq 0$ для любого $t\in[a;b]$, то $\|x\|\geq 0\ \forall\ x\in C[a;b]$.

Пусть $\|x\|=0$. Тогда $\max\limits_{t\in[a;b]}|x(t)|=0$. Поэтому $|x(t)|=0$ для любого $t\in[a;b]$, т. е. $x(t)\equiv 0$ на $[a;b]$ (x является нулевым элементом пространства X).

Если x является нулевым элементом пространства X, т. е. $x(t)\equiv 0$ на $[a;b]$, то сразу получим, что $\|x\|=0$.

N2) $\|\lambda x\|=\max\limits_{t\in[a;b]}|\lambda x(t)|=|\lambda|\max\limits_{t\in[a;b]}|x(t)|=|\lambda|\cdot\|x\|$.

N3) Зафиксируем $t\in[a;b]$. Рассмотрим выражение $|x(t)+y(t)|$. Применяя к нему неравенство треугольника, справедливое для модуля числа, получим $|x(t)+y(t)|\leq|x(t)|+|y(t)|\leq\max\limits_{t\in[a;b]}|x(t)|+\max\limits_{t\in[a;b]}|y(t)|$. То есть $|x(t)+y(t)|\leq\|x\|+\|y\|$. В силу того что последнее неравенство справедливо для каждого $t\in[a;b]$, можем утверждать, что и $\max\limits_{t\in[a;b]}|x(t)+y(t)|\leq\|x\|+\|y\|$, т. е. $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$.

Следовательно, указанное отображение определяет норму в пространстве $C[a;b]$.

Задачи

2.1. Доказать, что в определении нормы условие $\|x\|=0\Leftrightarrow x=\theta$ можно заменить на $\|x\|=0\Rightarrow x=\theta$.

2.2. Проверить выполнимость аксиом нормы в пространствах приложения 2.

2.3. Измеримая на $[a;b]$ по Лебегу функция $x(t)$ называется *существенно ограниченной,* если существует такая константа $C>0$, что $|x(t)|\leq C$ почти всюду на $[a;b]$.

Наименьшая из таких констант C называется *существенным супремумом* функции $|x(t)|$ и обозначается $\operatorname*{ess\,sup}\limits_{t\in[a;b]}|x(t)|$.

Справедлива формула

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[a;b]} |x(t)| = \inf_{A:\mu(A)=0} \sup_{[a;b]\setminus A} |x(t)|,$$

где μ — мера Лебега.

Обозначим через $L_\infty[a;b]$ пространство классов эквивалентных измеримых функций, существенно ограниченных на $[a;b]$.

1. Привести пример измеримой функции, не принадлежащей $L_\infty[a;b]$.

2. Привести пример измеримой функции, принадлежащей $L_\infty[a;b]$, но не являющейся ограниченной на $[a;b]$.

3. Проверить, что $L_\infty[a;b]$ является нормированным пространством (см. приложение 2).

2.4. Функция $x(t)$, заданная на $[a;b]$, называется *функцией с ограниченной вариацией*, если существует такая константа C, что для любого разбиения отрезка $[a;b]$

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$$

выполняется неравенство $\sum\limits_{k=1}^{n} |x(t_k) - x(t_{k-1})| < C$.

Полной вариацией такой функции называется число

$$\mathop{\mathbf{V}}_a^b x(t) = \sup \sum_{k=1}^{n} |x(t_k) - x(t_{k-1})|,$$

где супремум берется по всем разбиениям отрезка $[a;b]$.

Показать, что пространство $V[a;b]$ функций с ограниченной на $[a;b]$ вариацией является нормированным (см. приложение 2).

2.5. Можно ли в линейном пространстве $C^{(1)}[0;1]$ за норму элемента принять:

а) $\|x\| = \max\limits_{t\in[0;1]} |x(t)|$;

б) $\|x\| = \max\limits_{t\in[0;1]} |x'(t)|$;

в) $\|x\| = \max\limits_{t\in[0;1]} |x(t)| + \max\limits_{t\in[0;1]} |x'(t)|$;

г) $\|x\| = -\max\limits_{t\in[0;1]} |x(t)|$;

д) $\|x\| = \max\limits_{t\in[0;1]} |x'(t)| + |x(a)|$, a – фиксированное число из отрезка $[0;1]$;

е) $\|x\| = \max\limits_{t\in[0;1/2]} |x(t)|$;

ж) $\|x\| = \max\limits_{t\in[0;1]} |x'(t)| + \int\limits_0^1 |x(t)|\,dt$;

з) $\|x\| = e^{\max\limits_{t\in[0;1]} |x(t)|} - 1$;

и) $\|x\| = \max\limits_{t\in[0;1]} |x'(t)| + |x(a) - x(b)|$, $a, b \in [0;1]$;

к) $\|x\| = i \max\limits_{t\in[0;1]} |x(t)| + \max\limits_{t\in[0;1]} |x'(t)|$, i — мнимая единица;

л) $\|x\| = x(t) + ix'(t)$, i — мнимая единица?

2.6. Пусть $\alpha_k > 0$ $(k = 1\ \ldots, n)$. Можно ли в $\mathbb{R}^n$ ввести норму следующими способами:

а) $\|x\| = \max\limits_{1\le k\le n} (\alpha_k |x_k|)$;

б) $\|x\| = \max\limits_{1\le k\le n-1} (\alpha_k |x_k|)$;

в) $\|x\| = \sum\limits_{k=1}^{n} (\alpha_k |x_k|)$;

г) $\|x\| = \sum\limits_{k=1}^{n} (\alpha_k |x_k|^2)$;

д) $\|x\| = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$;

е) $\|x\| = \left[\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k |x_k|^2\right]^{\frac{1}{2}}$;

ж) $\|x\| = \left[\sum\limits_{m=1}^{n} \sum\limits_{k=1}^{m} |x_k|^2\right]^{\frac{1}{2}}$;

з) $\|x\| = \max\limits_{1\le k\le n} \left|\sum\limits_{m=1}^{k} x_m\right|$?

2.7. Пусть $(x, \|\cdot\|)$ – линейное нормированное пространство. Является ли отображение

$$\|x\|_1 = \frac{\|x\|}{1+\|x\|}$$

нормой в X?

2.8. Пусть $X = X_1 \times X_2$, где $(X_1, \|\cdot\|_1)$, $(X_2, \|\cdot\|_2)$ — линейные нормированные пространства. Является ли нормами в пространстве X функции:

а) $\|(x_1, x_2)\| = \|x_1\|_1 + \|x_2\|_2$;

б) $\|(x_1, x_2)\| = \|(\|x_1\|_1, \|x_2\|_2)\|_3$, где $\|\cdot\|_3$ — произвольная норма в $\mathbb{R}^2$, обладающая свойством монотонности, т. е. если $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a \le c$, $b \le d$, то $\|(a,b)\|_3 \le \|(c,d)\|_3$?

2.9. Можно ли в пространстве последовательностей s ввести норму так, чтобы для любых $x, y \in s$ выполнялось равенство $\rho(x,y) = \|x-y\|$?

2.10. Найти норму функции $x(t) = t^\alpha$ в тех пространствах $L_p[0;1]$ $(p \ge 1)$, которым эта функция принадлежит.

1.3. Множества в метрических и нормированных пространствах

Пусть (X,ρ) — *метрическое пространство.*

Открытым шаром $B(x_0,r)$ с центром в точке x_0 радиусом r называется множество

$$\{x \in X : \rho(x,x_0) < r\},$$

замкнутым шаром $B[x_0,r]$ с центром в точке x_0 радиусом r является множество

$$\{x \in X : \rho(x,x_0) \le r\}.$$

Аналогично определяются открытый и замкнутый шар *в линейном нормированном пространстве* $(X,\|\cdot\|)$:
открытый шар $B(x_0,r) = \{x \in X : \|x - x_0\| < r\}$,
замкнутый шар $B[x_0,r] = \{x \in X : \|x - x_0\| \le r\}$.

Множество $M \subset X$ будем называть **открытым**, если для каждой точки из M найдется открытый шар с центром в этой точке, содержащийся в M.

Точку $x \in X$ назовем **предельной** точкой множества M, если в любом шаре с центром в этой точке найдется бесконечно много точек множества M.

Множество $M \subset X$ называется **замкнутым**, если оно содержит все свои предельные точки.

Множество $M \subset X$ называется **ограниченным**, если существует шар, содержащий это множество.

Пусть X — линейное пространство, $x,y \in X$. Отрезком, соединяющим x и y, называется множество

$$[x,y] = \{z \in X : z = (1-t)x + ty, t \in [0,1]\}.$$

Множество $M \subset X$ называется **выпуклым**, если вместе с любыми двумя точками оно содержит и отрезок, соединяющий их.

Задачи

3.1. Пусть $A, B \in \mathbb{R}^2$ и $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$. Описать шары в $\mathbb{R}^2$ с метриками:

а) $\rho(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$;
б) $\rho(A, B) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$;
в) $\rho(A, B) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$.

3.2. Описать шар радиусом r с центром x в $C[a, b]$.

3.3. Описать открытые и замкнутые шары в метрическом пространстве X_d.

3.4. Описать все открытые и замкнутые множества в пространстве X_d.

3.5. Является ли открытым в пространстве $C[a; b]$ множество функций $x(t)$, таких, что для любого $t \in [a; b]$ выполняется неравенство $|x(t)| < 1$?

3.6. Доказать, что в метрическом пространстве X открытый шар является открытым множеством, а замкнутый шар является замкнутым множеством.

3.7. *Замыканием* $\overline{M}$ множества M называется объединение множества M и множества предельных точек множества M.

Верно ли, что в произвольном метрическом пространстве $\overline{B(x_0, r)} = B[x_0, r]$?

3.8. Показать, что в пространстве B_0:

а) любой открытый шар $B(x, r)$ является замкнутым множеством, но может не быть замкнутым шаром;

б) $B(y, r) = B(x, r)$ для любого $y \in B(x, r)$;

в) любой замкнутый шар $B[x, r]$ является открытым множеством, но не обязательно является открытым шаром;

г) $B[y, r] = B[x, r]$ для любого $y \in B[x, r]$;

д) если два шара в B_0 имеют общую точку, то один из них содержится в другом.

3.9. Привести пример метрического пространства и двух шаров в этом пространстве, таких, что шар с большим радиусом содержится в шаре с меньшим радиусом.

3.10. Доказать, что если шар радиусом 7 содержится в шаре радиусом 3, то они совпадают.

3.11. Доказать, что множество $M \subset X$ ограничено тогда и только тогда, когда для любой последовательности $x_n \in M$ и любой последовательности $\lambda_n \in \mathbb{K}$, сходящейся к нулю, последовательность $\lambda_n x_n$ сходится к нулевому элементу пространства X.

3.12. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. *Диаметром* множества $M \subset$ называется величина

$$\operatorname{diam} M = \sup_{x,y \in M} \rho(x, y).$$

Доказать, что множество M является ограниченным тогда и только тогда, когда $\operatorname{diam}\, M < \infty$.

3.13. Доказать, что всякий шар в нормированном пространстве является выпуклым множеством.

3.14. Будет ли шар в линейном метрическом пространстве являться выпуклым множеством?

3.15. Пусть X — линейное пространство. *Алгебраической суммой* множеств A и B пространства X называется множество

$$A + B = \{z \in X : z = x + y;\ x \in A,\ y \in B\}.$$

Пусть A, $B \subset X$ — выпуклые множества. Будет ли алгебраическая сумма множеств A и B являться выпуклым множеством?

3.16. Пусть X — линейное пространство, $A \subset X$ — выпуклое множество и $\lambda \in \mathbb{R}$. Является ли множество

$$\lambda A = \{z \in X :\ z = \lambda x,\ x \in A\}$$

выпуклым?

3.17. Пусть X — линейное пространство, $A \subset X$ — выпуклое множество и $x_0 \in X$. Является ли множество

$$x_0 + A = \{z \in X :\ z = x_0 + x,\ x \in A\}$$

выпуклым?

3.18. Пусть A и B — выпуклые множества из линейного пространства X. Будут ли $A\bigcup B$, $A\backslash B$, $A^c = X\backslash A$ являться выпуклыми множествами?

3.19. Пусть $C = \bigcap\limits_{\alpha\in A} C_\alpha$, где C_α — выпуклые множества, A — некоторое множество индексов. Будет ли множество C выпуклым?

3.20. Пусть $X = C[a;b]$, M — множество таких функций $f(x)$ из X, что $|f(x)| \leqslant 1$. Показать, что M является выпуклым множеством.

3.21. Доказать, что параллелепипед

$$P = \{x = (\xi_1, \xi_2, ...) \in l_2 : |\xi_k| \leqslant 2^{-k+1}\ \forall\ k\}$$

является выпуклым множеством в l_2.

3.22. Показать, что эллипсоид

$$E = \{x = (\xi_1, \xi_2, ...) \in l_2 : \sum_{k=1}^{\infty} k^2\xi_k^2 \leqslant 1\}$$

является выпуклым множеством в l_2.

3.23. Будет ли выпуклым множество:

а) многочленов степени $= k$;

б) многочленов степени $\leqslant k$;

в) непрерывных на $[0;1]$ функций, удовлетворяющих условию

$$\int\limits_0^1 |x(t)|dt \leqslant 1;$$

г) непрерывных на $[0;1]$ функций, удовлетворяющих условию

$$\int\limits_0^1 |x(t)|^2 dt \leqslant 1;$$

д) непрерывно дифференцируемых на $[0;1]$ функций, удовлетворяющих условию $\max\limits_{t\in[0,1]}|x(t)| + \max\limits_{t\in[0,1]}|x'(t)| \leqslant 1$;

е) всех четных функций, определенных на $\mathbb{R}$;

ж) всех нечетных функций, определенных на $\mathbb{R}$;

з) всех функций, определенных на $\mathbb{R}$, которые либо четны, либо нечетны;

и) всех возрастающих функций, определенных на $\mathbb{R}$;

к) всех убывающих функций, определенных на $\mathbb{R}$;

л) всех монотонных функций, определенных на $\mathbb{R}$;

м) всех функций $x(t)$, для которых $x(0) = 0$;

н) всех периодических функций;

о) всех $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_p$, для которых $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k = 0$ (здесь n — фиксированное натуральное число)?

1.4. Сходимость в метрических и нормированных пространствах

Если (X,ρ) — *метрическое пространство*, $x_n, x \in X$, то говорят, что последовательность x_n при $n \to \infty$ **сходится** к x, и обозначают $x_n \to x$ при $n \to \infty$, если $\rho(x_n, x) \to 0$ при $n \to \infty$.

В *линейном нормированном пространстве* $(X, \|\cdot\|)$ последовательность x_n при $n \to \infty$ **сходится** к x (обозначается, как и ранее), если $\|x_n - x\| \to 0$ при $n \to \infty$.

Последовательность x_n называется **сходящейся** в метрическом (линейном нормированном пространстве) X, если существует $x \in X$, для которого $x_n \to x$ при $n \to \infty$. Отметим, что сходящаяся последовательность имеет единственный предел.

Сходящаяся последовательность $x_n \in X$ всегда является **фундаментальной**, т. е. $\rho(x_n, x_m) \to 0$ при $n, m \to \infty$ (в случае метрического пространства) или $\|x_n - x_m\| \to 0$ при $n, m \to \infty$ (в случае нормированного пространства).

Пример. *Исследовать на сходимость последовательности*:
1. $x_n = (\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n}, 0, 0, \ldots)$ *в пространстве* s;
2. $x_n(t) = t^n - t^{2n}$ *в пространстве* $C[0;1]$.

Решение.

1. Последовательность x_n при $n \to \infty$ покоординатно сходится к элементу $x = (1, 1, \ldots) \in s$. Для того чтобы выяснить, сходится ли x_n к x при $n \to \infty$ в пространстве s, рассмотрим величину $\rho(x_n, x)$. Зная, как задается метрика в пространстве s, перепишем эту величину в виде

$$\rho(x_n, x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|1-0|}{1+|1-0|} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Последняя сумма является суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $1/2$, поэтому

$$\rho(x_n, x) = \frac{2^{-(n+2)}}{1 - 1/2} = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Следовательно, $\rho(x_n, x) \to 0$ при $n \to \infty$. Значит, последовательность x_n сходится в пространстве s к элементу $x = (1, 1, \ldots)$.

2. Поточечно последовательность $x_n(t)$ сходится к $x(t) \equiv 0$.

Проверим, будет ли x_n сходиться к x в $C[0;1]$. Для этого рассмотрим

$$\|x_n - x\| = \max_{t\in[0;1]} |x_n(t) - x(t)| = \max_{t\in[0;1]} |t^n - t^{2n}|.$$

Найдем максимум модуля функции $f(t) = t^n - t^{2n}$ на отрезке $[0;1]$. Производная $f'(t) = nt^{n-1} - 2nt^{2n-1}$ обращается в нуль в точках $t = 0$ и $t = \sqrt[n]{1/2}$, следовательно, максимум $|f(t)|$ достигается либо в этих точках, либо в точке $t = 1$ (конец промежутка). Сравнивая значения $|f(0)| = 0$, $|f(1)| = 0$, $|f(\sqrt[n]{1/2})| = 1/4$, приходим к выводу о том, что $\|x_n - x\| = 1/4 \nrightarrow 0$ при $n \to \infty$. Значит, x_n не сходится к x в $C[0;1]$.

Покажем, что x_n не сходится ни к какому другому элементу из $C[0;1]$. Рассмотрим

$$\|x_n - x_{2n}\| = \max_{t\in[0;1]} |x_n(t) - x_{2n}(t)| = \max_{t\in[0;1]} |t^n - 2t^{2n} + t^{4n}|.$$

Последний максимум больше значения выражения $|t^n - 2t^{2n} + t^{4n}|$ в точке $t = \sqrt[n]{1/2}$, равного $1/16$. Поэтому $\|x_n - x_{2n}\| \geq 1/16$, т. е. $\|x_n - x_{2n}\| \nrightarrow 0$ при $n \to \infty$ и последовательность x_n не является фундаментальной, а значит и сходящейся в $C[0;1]$.

Задачи

4.1. Выяснить смысл сходимости в пространствах:

а) $C[a;b]$;

б) $C^{(n)}[a;b]$;

в) l_∞;

г) s.

4.2. Как в пространстве $C^{(n)}[a;b]$ можно ввести норму, чтобы сходимость по этой норме имела тот же смысл, что и сходимость по норме из приложения 2?

4.3. Пусть X — линейное нормированное пространство, $x_n,\ x,\ y_n, y \in X$ и $\lambda_n,\ \lambda$ — константы. Доказать, что если:

а) $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$, то последовательность x_n ограничена;

б) $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$, $\lambda_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda$, то $\lambda_n x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda x$;

в) $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$, $\|x_n - y_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, то $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$;
д) $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$, то $\|x_n - y\| \xrightarrow[n\to\infty]{} \|x - y\|$;
е) $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$, $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y$, то $\|x_n - y_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} \|x - y\|$.

4.4. Пусть $x_n(t),\ x(t),\ y_n(t),\ y(t) \in C[a;b]$ и $x_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} x(t)$. Доказать, что $x_n(t)y_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} x(t)y(t)$.

4.5. Сходится ли последовательность

$$x_n(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1} - \frac{t^{n+2}}{n+2}$$

в пространствах:
а) $C[0;1]$;
б) $C^{(1)}[0;1]$?

4.6. Исследовать на сходимость последовательность

$$x_n = \left(\underbrace{0,0,\ldots,0,}_{n}\frac{1}{2^n+1},\frac{1}{2^n+2},\ldots,\frac{1}{2^n+n},0,\ldots\right)$$

в пространствах $l_\infty,\ l_p,\ c_0$.

4.7. Исследовать на сходимость в $L_2[0;1]$ последовательность $x_n(t) = n^2te^{-nt}$.

4.8. В каких из пространств — l_p, l_∞, s — сходятся последовательности:
а) $x_n = (1,2,\ldots,n,0,0,\ldots)$;
б) $x_n = (\underbrace{1,1,\ldots,1}_{n},0,0,\ldots)$;

в) $x_n = \left(\underbrace{\frac{1}{n},\frac{1}{n},\ldots,\frac{1}{n}}_{n},0,0,\ldots\right)$;

г) $x_n = \left(\underbrace{\frac{1}{n^\alpha},\frac{1}{n^\alpha},\ldots,\frac{1}{n^\alpha}}_{n},0,0,\ldots\right)$?

4.9. Исследовать на сходимость в пространстве l_2 последовательность

$$x_n = \left(\underbrace{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}}_{n^2}, 0, 0, \ldots \right).$$

4.10. Исследовать на сходимость в пространствах c_0 и l_p последовательности:

а) $x_n = \left(1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \ldots, \dfrac{1}{n}, 0, 0, \ldots\right)$;

б) $x_n = \left(\dfrac{1}{\ln 2}, \dfrac{1}{\ln 3}, \ldots, \dfrac{1}{\ln(n+1)}, 0, 0, \ldots\right)$.

4.11. Какие последовательности сходятся в $C[0;1]$:

а) $x_n(t) = t^n$;

б) $x_n(t) = \sin \pi n t$;

в) $x_n(t) = \frac{1}{2n}\sqrt[5]{n^5 t + 3}$?

1.5. Полные пространства

Пусть X — метрическое пространство. Пространство X будем называть **полным**, если в нем сходится всякая фундаментальная последовательность.

Полное линейное нормированное пространство называют **банаховым** пространством. Любое метрическое пространство (не обязательно полное) можно включить в некоторое полное метрическое пространство. Всякое подмножество $M \subset X$ метрического пространства (X, ρ_X), такое, что $\rho_M(x, y) = \rho_X(x, y)$ для любых $x, y \in M$, является метрическим пространством, называемым **подпространством** пространства (X, ρ_X). Полное метрическое пространство $\widehat{X}$ называется **пополнением** метрического пространства X, если X является подпространством $\widehat{X}$ и X всюду плотно в $\widehat{X}$, т. е. $\widehat{X} = \overline{X}$.

Взаимно однозначное отображение $f : (X, \rho_X) \to (Y, \rho_Y)$ называется **изометрией**, если $\rho_X(x, y) = \rho_Y(f(x), f(y))$ для любых $x, y \in X$. Метрические пространства называются **изометричными**, если между ними существует изометрия.

Теорема 1. *Любые два пополнения метрического пространства изометричны.*

Одной из характеристик полного метрического пространства является следующая теорема.

Теорема 2 (о вложенных шарах). *Метрическое пространство является полным тогда и только тогда, когда любая последовательность вложенных друг в друга замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю, имеет общую точку.*

Пример. *Доказать полноту пространств:*

а) $\mathbb{R}^n$;

б) $C[a;b]$.

Решение.

а) Пусть $x^{(k)} = \left(x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}\right) \in \mathbb{R}^n$ и $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ — некоторая фундаментальная последовательность в $\mathbb{R}^n$. Это означает, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное число $N = N(\varepsilon)$, что для любых $k, m > N$ выполняется неравенство

$$\rho(x^{(k)}, x^{(m)}) = \|x^{(k)} - x^{(m)}\| = \left(\sum_{j=1}^{n} \left(x_j^{(k)} - x_j^{(m)}\right)^2\right)^{1/2} < \varepsilon.$$

Отсюда следует, что для любых $k, m > N$

$$\sum_{j=1}^{n} \left(x_j^{(k)} - x_j^{(m)} \right)^2 < \varepsilon^2.$$

Тогда для каждого $j = 1, \ldots, n$ и для всех $k, m > N$ выполняется

$$|x_j^{(k)} - x_j^{(m)}| < \varepsilon.$$

Таким образом, для каждого j числовая последовательность $\{x_j^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ является фундаментальной. А так как всякая фундаментальная числовая последовательность сходится, то существует $\lim\limits_{k\to\infty} x_j^{(k)}$. Обозначим

$$x_j = \lim_{k\to\infty} x_j^{(k)}$$

и положим $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$. Тогда очевидно $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = x$.

Таким образом, пространство $\mathbb{R}^n$ полно.

б) Пусть $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ — фундаментальная последовательность в $C[a;b]$. Покажем, что эта последовательность сходится.

Так как $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность в $C[a;b]$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует натуральное число $N = N(\varepsilon)$, такое, что для любых $n, m > N$ выполняется неравенство

$$\rho(x_n, x_m) = \|x_n - x_m\| = \max_{t\in[a;b]} |x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon.$$

Это означает, что для каждого $t \in [a;b]$ и $n, m > N$

$$|x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon.$$

Пользуясь критерием Коши равномерной сходимости последовательности функций, получим, что последовательность $\{x_n(t)\}$ сходится равномерно на $[a;b]$. Как известно, ее предел $x(t)$ в этом случае будет непрерывной функцией. Устремляя в последнем неравенстве m к ∞, получим

$$|x_n(t) - x(t)| \le \varepsilon \text{ для всех } t \in [a;b] \text{ и для всех } n > N,$$

причем $x(t) \in C[a;b]$. А это и означает, что $\{x_n(t)\}$ сходится к $x(t)$ в смысле метрики пространства $C[a;b]$.

Таким образом, пространство $C[a;b]$ полно.

Задачи

5.1. Доказать, что s — полное метрическое пространство.

5.2. Доказать, что l_∞ — полное метрическое пространство.

5.3. Пусть нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ в линейном пространстве X эквивалентны. Доказать, что нормированное пространство $(X, \|\cdot\|_1)$ полно тогда и только тогда, когда полно линейное нормированное пространство $(X, \|\cdot\|_2)$.

5.4. Доказать, что пространство $C_1[a;b]$ не является полным.

5.5. Доказать, что пространство $C_2[a;b]$ не является полным.

5.6. Доказать полноту пространства l_p.

5.7. Доказать полноту пространства $L_p[a;b]$.

5.8. Является ли полным пространство $P[0;1]$ всех многочленов на $[0;1]$ с метрикой пространства $C[a;b]$? Если нет, найти его пополнение.

5.9. Какой вид имеют фундаментальные последовательности в пространстве с дискретной метрикой X_d?

5.10. Является ли полным пространство с дискретной метрикой X_d?

5.11. Какой вид имеют фундаментальные последовательности в пространстве $\mathbb{N}$ с метрикой из приложения 1?

5.12. Является ли полным пространство из задачи 5.11?

5.13. Показать, что если опустить одно из условий:

а) полноту пространства,

б) замкнутость шаров,

в) стремление к нулю радиусов шаров,

г) вложенность шаров друг в друга,

то теорема о вложенных шарах перестанет быть верной.

5.14. Что можно сказать о полноте пространства (X, ρ) с метриками задачи 1.10?

5.15. Каким условиям должна удовлетворять определенная на $\mathbb{R}$ непрерывная функция $u = f(v)$, чтобы на $\mathbb{R}$ можно было задать метрику формулой

$$\rho(x, y) = |f(x) - f(y)|$$

и в этой метрике пространство было полным?

5.16. Пусть $x_n \in X$ – фундаментальная последовательность, x_{n_k} – ее сходящаяся подпоследовательность. Доказать, что последовательность x_n сходится к тому же пределу, что и подпоследовательность.

5.17. Пусть $x_n \in X$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_{n+1} - x_n\|$ сходится. Доказать, что x_n – фундаментальная последовательность. Верно ли обратное?

5.18. Пусть $x_n,\ y_n \in X$ – фундаментальные последовательности. Доказать, что последовательность $\lambda_n = \|x_n - y_n\|$ сходится.

5.19. Будет ли полным метрическое пространство $\mathbb{R}$ с метриками:

а) $\rho(x, y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$;

б) $\rho(x, y) = |e^x - e^y|$;

в) $\rho(x, y) = |x^3 - y^3|$?

Если нет, найти пополнение.

1.6. Принцип сжимающих отображений

Отображение $y = Ax$ метрического пространства (X, ρ) в метрическое пространство (Y, d) называется **сжимающим**, если существует такое число $\alpha \in (0; 1)$, что для любых $x, y \in X$ выполняется неравенство

$$d(Ax, Ay) \leq \alpha\rho(x, y).$$

Точка x пространства X называется **неподвижной точкой** отображения A, если $Ax = x$. Очевидно, что неподвижная точка x отображения A представляет собой решение уравнения $Ax = x$.

Сформулируем теорему, которая лежит в основе метода, позволяющего доказывать существование и единственность решений различных уравнений.

Теорема Банаха (принцип сжимающих отображений). *Всякое сжимающее отображение $A : X \to X$, определенное в полном метрическом пространстве X, имеет единственную неподвижную точку.*

Теорема Банаха гарантирует не только существование и единственность в данных условиях решения уравнения $Ax = x$, но и дает метод построения этого решения (**метод последовательных приближений**). Этот метод заключается в следующем: пусть X — полное пространство, $A : X \to X$ — сжимающее отображение. Возьмем произвольную точку $x_0 \in X$ и построим сходящуюся последовательность $\{x_n\}$ следующим образом:

$$x_1 = Ax_0,$$

$$x_2 = Ax_1,$$

$$\dots$$

$$x_n = Ax_{n-1},$$

$$\dots$$

Ее предел и является решением уравнения $Ax = x$.

Пример. *В пространстве $C[0; 1]$ решить интегральное уравнение*

$$x(t) = \frac{1}{3}\int_0^1 tx(s)\,ds + 1.$$

Решение. Обозначим

$$Ax(t) = \frac{1}{3}\int\limits_0^1 tx(s)\,ds + 1.$$

Заметим, что отображение A действует в пространство $C[0,1]$. Таким образом, задача сводится к решению уравнения $x = Ax$ в пространстве $C[0,1]$, т. е. к нахождению неподвижной точки отображения $A : C[0,1] \to C[0,1]$.

Покажем, что отображение A является сжимающим. Рассмотрим

$$|Ax(t) - Ay(t)| = \frac{1}{3}\left|\int\limits_0^1 t(x(s) - y(s))\,ds\right|.$$

Используя известное свойство интеграла, получим, что последнее выражение не превосходит величины

$$\frac{1}{3}\int\limits_0^1 t|x(s) - y(s)|\,ds \leqslant \frac{1}{3}\int\limits_0^1 \max_{t\in[0;1]} t \cdot \max_{s\in[0;1]} |x(s) - y(s)|\,ds =$$

$$= \frac{1}{3}\|x - y\|\int\limits_0^1 ds = \frac{1}{3}\rho(x,y).$$

Таким образом, для любого $t \in [0;1]$

$$|Ax(t) - Ay(t)| \leqslant \frac{1}{3}\rho(x,y).$$

Значит, для любых $x, y \in C[0;1]$ выполняется неравенство

$$\rho(Ax, Ay) = \max_{t\in[0;1]} |Ax(t) - Ay(t)| \leqslant \frac{1}{3}\rho(x,y).$$

Следовательно, отображение A является сжимающим.

Будем искать решение методом последовательных приближений. Возьмем произвольный элемент $x_0 \in C[0;1]$ и построим сходящуюся последовательность $\{x_n\}$ приближенных решений уравнения $Ax = x$. Пусть $x_0 = x_0(t) \equiv 0$, тогда

$$x_1 = A(x_0) = \frac{1}{3}\int_0^1 t \cdot 0\, ds + 1 = 1;$$

$$x_2 = A(x_1) = \frac{1}{3}\int_0^1 t \cdot 1\, ds + 1 = \frac{t}{3} + 1;$$

$$x_3 = A(x_2) = \frac{1}{3}\int_0^1 t\cdot\left(\frac{s}{3}+1\right)\, ds + 1 = \frac{t}{3}\left(\frac{1}{6}+1\right) + 1 = t\left(\frac{1}{3\cdot 6}+\frac{1}{3}\right)+1;$$

$$x_4 = A(x_3) = \frac{t}{3}\int_0^1 \left(s\left(\frac{1}{3\cdot 6}+\frac{1}{3}\right)+1\right)\, ds + 1 = t\left(\frac{1}{3\cdot 6^2}+\frac{1}{3\cdot 6}+\frac{1}{3}\right)+1;$$

$\ldots$

$$x_n = A(x_{n-1}) = \frac{t}{3}\left(\frac{1}{6^{n-2}}+\frac{1}{6^{n-3}}+\cdots+1\right)+1 = \frac{t}{3}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{6}}\right)+1.$$

Найдем предел этой последовательности:

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t) = \frac{t}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{6}}\right) + 1 = t\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{5}\right) + 1 = \frac{2}{5}t + 1.$$

Таким образом, $x(t) = \dfrac{2}{5}t + 1$ — единственное решение уравнения.

Задачи

6.1. В пространстве $C[0;1]$ решить интегральные уравнения:

а) $x(t) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int\limits_0^1 tsx(s)\,ds + \dfrac{5}{6}t;$

б) $x(t) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int\limits_0^1 ts^2x(s)\,ds + 1;$

в) $x(t) = \dfrac{1}{3}\displaystyle\int\limits_0^1 e^{t-s}x(s)\,ds + 1;$

г) $x(t) = \lambda\displaystyle\int\limits_0^t x(s)\,ds + 1$ при $|\lambda| < 1;$

д) $x(t) = \dfrac{1}{5}\displaystyle\int\limits_0^1 e^{t}x(s)\,ds + 1;$

е) $x(t) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_0^1 \sin\pi s\cdot x(s)\,ds + \cos\pi t.$

6.2. Показать, что в теореме Банаха условие

$$\rho(Ax, Ay) \le \alpha\rho(x, y), \quad \alpha < 1,$$

нельзя заменить одним из более слабых условий:

а) $\rho(Ax, Ay) \le \rho(x, y)$;

б) $\rho(Ax, Ay) < \rho(x, y)$.

6.3. Доказать обобщенный принцип сжимающих отображений: если $A : X \to X$, X – полное пространство, отображение $A^n = \underbrace{A\ldots A}_{n}$ является сжимающим, то A имеет единственную неподвижную точку.

6.4. Доказать, что последовательность цепных дробей

$$2,\ 2+\frac{1}{2},\ 2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}},\ 2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}},\ldots$$

является сходящейся и найти ее предел.

1.7. Гильбертовы пространства

Линейное пространство X над числовым полем $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) называется **пространством со скалярным произведением**, если каждой паре его элементов x, y поставлено в соответствие число из поля $\mathbb{K}$, обозначаемое (x, y) и называемое **скалярным произведением**, для любых $x, y, z \in X$ удовлетворяющее условиям:

1) $(x, x) \geq 0$, $(x, x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = \theta$;
2) $(x, y) = \overline{(y, x)}$ (черта означает комплексное сопряжение);
3) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$ для любого $\lambda \in \mathbb{K}$;
4) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$.

Если $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, то X называют **евклидовым** пространством, если $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ — **унитарным** пространством.

В пространстве X со скалярным произведением верно *неравенство Коши — Буняковского — Шварца*

$$|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y) \quad \forall\, x, y \in X,$$

из которого следует, что в X можно ввести *норму* равенством

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}.$$

Эту норму будем называть нормой, порожденной заданным скалярным произведением.

Пространство H со скалярным произведением называется **гильбертовым**, если оно является полным по отношению к этой норме.

Теорема. *Для того чтобы нормированное пространство X было пространством со скалярным произведением, необходимо и достаточно, чтобы для любых двух его элементов x и y выполнялось равенство параллелограмма*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

Углом между ненулевыми элементами x и y вещественного гильбертова пространства называется угол φ, заключенный между 0 и π, такой, что $\cos\varphi = \dfrac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|}$.

Элементы $x, y \in H$ называют **ортогональными** и записывают $x \perp y$, если $(x, y) = 0$.

Говорят, что элемент $x \in H$ **ортогонален** некоторому **множеству** $L \subset H$, и пишут $x \perp L$, если x ортогонален каждому элементу из L, т. е. для любого $y \in L$ выполняется равенство $(x, y) = 0$. Множество всех элементов $x \in H$, ортогональных данному множеству $L \subset H$, обозначается $L^{\perp}$ и называется **ортогональным дополнением** множества L.

Система ненулевых элементов $h_1, h_2, \ldots \in H$ называется **ортогональной**, если $(h_j, h_k) = 0$ при $j \neq k$, и **ортонормированной**, если

$$(h_j, h_k) = \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{при } j = k; \\ 0 & \text{при } j \neq k. \end{cases}$$

Система элементов $x_1, x_2, \ldots \in H$ называется **линейно независимой**, если при любом натуральном n система $x_1, x_2, \ldots, x_n$ линейно независима, т. е. линейная комбинация $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$, где $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}$, равна нулевому элементу пространства H тогда и только тогда, когда $c_1 = \ldots = c_n = 0$.

Задачи

7.1. Доказать, что $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$ являются гильбертовыми пространствами.

7.2. В каких из перечисленных пространств можно ввести скалярное произведение, согласующееся с нормой этого пространства: c, c_0, l_2, $C^{(n)}[0;1]$, $L_2[a;b]$?

7.3. Доказать, что в пространстве l_p $(p \neq 2)$ нельзя ввести скалярное произведение, согласующееся с нормой этого пространства.

7.4. Показать, что в пространстве $L_p[a;b]$ $(p \neq 2)$ нельзя ввести скалярное произведение, согласующееся с нормой этого пространства.

7.5. Доказать, что условие $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$ в определении скалярного произведения можно заменить на более слабое условие $(x, x) = 0 \Rightarrow x = \theta$.

7.6. Доказать, что в евклидовом пространстве $x \perp y$ тогда и только тогда, когда $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

7.7. Проверить, что в евклидовом пространстве выполняется теорема косинусов

$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\|\|y\| \cos \widehat{x,y}.$$

7.8. Доказать, что равенство в неравенстве Коши — Буняковского выполняется тогда и только тогда, когда x и y линейно зависимы.

7.9. Доказать, что в гильбертовом пространстве справедливо *поляризационное тождество*

$$4(x,y) = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2.$$

7.10. Доказать, что в пространстве со скалярным произведением для любых элементов x, y, z имеет место *тождество Апполония*

$$\|z-x\|^2 + \|z-y\|^2 = \frac{1}{2}\|x-y\|^2 + 2\left\|z - \frac{x+y}{2}\right\|^2.$$

7.11. Пусть X — линейное нормированное пространство и для любых его элементов x и y выполняется равенство параллелограмма. Доказать, что следующие формулы задают в X скалярное произведение, согласующееся с нормой в X: а) если X — вещественное пространство, то

$$(x,y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right);$$

б) если X — комплексное пространство, то

$$(x,y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) - \frac{i}{4}\left(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2\right).$$

7.12. Доказать, что в пространстве со скалярным произведением элементы x и y ортогональны тогда и только тогда, когда для любых λ, $\mu \in \mathbb{K}$ выполняется равенство

$$\|\lambda x\|^2 + \|\mu y\|^2 = \|\lambda x + \mu y\|^2.$$

7.13. Пусть $x_1, x_2, \ldots$ и $y_1, y_2, \ldots$ – *биортогональные системы* в H, т. е. такие системы, что

$$(x_j, y_k) = \begin{cases} 1, & \text{если } j = k; \\ 0, & \text{если } j \neq k. \end{cases}$$

Доказать, что каждая из этих систем линейно независима.

7.14. Доказать, что в линейном пространстве непрерывных на $[0; +\infty)$ функций $x(t)$, таких, что сходится интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} |x(t)|^2 e^{-t}\, dt,$$

функционал $(x, y) = \int\limits_0^{+\infty} x(t)\overline{y(t)} e^{-t}\, dt$ задает скалярное произведение.

7.15. Провести ортогонализацию линейно независимой системы 1, t, t^2 в пространстве из задачи 7.14.

7.16. Найти угол φ между элементами $x(t) = \sin t$ и $y(t) = t$ в пространстве $L_2[0; \pi]$.

7.17. В пространстве $L_2[-1; 1]$ найти углы треугольника, вершинами которого являются $x_1(t) \equiv 0$, $x_2(t) \equiv 1$ и $x_3(t) = t$.

7.18. Провести ортогонализацию элементов $x_0(t) \equiv 1$, $x_1(t) = t$, $x_2(t) = t^2$ в пространствах:

а) $L_2[-1; 1]$; б) $L_2[0; 1]$.

7.19. Проверить, что система элементов является ортонормированной в $L_2[0; 2\pi]$:

а) $\left\{ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int} \right\}_{n=-\infty}^{\infty}$;

б) $\left\{ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\left(n-\frac{1}{2}\right)t} \right\}_{n=-\infty}^{\infty}$;

в) $\left\{ \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \cos\left(\left(n - \dfrac{1}{2}\right) t\right), \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \sin\left(\left(n - \dfrac{1}{2}\right) t\right) \right\}_{n=1}^{\infty}$.

7.20. Доказать, что система элементов является ортонормированной в $L_2[0;\pi]$:

а) $\left\{\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\sin nt\right\}_{n=1}^{\infty}$;

б) $\left\{\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\sin\left(n-\dfrac{1}{2}\right)t\right\}_{n=1}^{\infty}$;

в) $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}, \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\cos nt\right\}_{n=1}^{\infty}$;

г) $\left\{\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\cos\left(n-\dfrac{1}{2}\right)t\right\}_{n=1}^{\infty}$.

1.8. Наилучшее приближение

Пусть (X, ρ) — метрическое пространство.

Расстоянием от точки $x \in X$ **до множества** $M \subset X$ называется число
$$\rho(x, M) = \inf_{y \in M} \rho(x, y).$$

Пусть $x \in X$. Если существует такой элемент $x^* \in M$, что $\rho(x, M) = \rho(x, x^*)$, то x^* называется **элементом наилучшего приближения** x элементами множества M.

Теорема 1 (об элементе наилучшего приближения в гильбертовом пространстве). *Пусть H — гильбертово пространство, $M \subset H$ — замкнутое выпуклое множество. Тогда для любого элемента $x \in H$ существует единственный элемент наилучшего приближения элементами из M.*

Для нахождения элемента наилучшего приближения в гильбертовом пространстве удобно пользоваться следующей теоремой:

Теорема 2 (о разложении элемента на проекции). *Пусть M— замкнутое линейное подпространство гильбертова пространства H, тогда любой элемент $x \in H$ единственным образом представим в виде $x = x' + x''$, где $x' \in M$, $x'' \in M^{\perp}$. При этом $\rho(x, M) = \|x - x'\| = \|x''\|$.*

Элементы x', x'' называются проекциями элемента x на M и $M^{\perp}$ соответственно. Таким образом, x' и будет элементом наилучшего приближения x элементами $M \subset H$.

Для банахова пространства теорема 1 уже не верна.

Задачи

8.1. Пусть X — линейное нормированное пространство, L — замкнутое подпространство X, $x \in X$, $y \in L$. Доказать, что $\rho\,(x, L) = \rho\,(x + y, L)$.

8.2. Пусть X — евклидово пространство, $x, y \in X$. Доказать, что при функция $\varphi(t) = \|x - ty\|$ достигает своей точной нижней грани на $\mathbb{R}$.

8.3. Доказать, что в пространстве c^2 множество элементов наилучшего приближения элемента $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ элементами подпространства $L = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$ имеет вид $x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix}$, при $\beta \in [-1, 1]$.

8.4. В пространстве $C[0,1]$ рассмотрим подпространство $L = \{x(t) \in C[0,1] : x(0) = 0\}$. Пусть $x(t) \equiv 1$. Описать множество элементов наилучшего приближения x элементами множества L.

8.5. В пространстве $C[0,1]$ найти расстояние от элемента $x(t) = t$ до подпространства постоянных функций.

8.6. В пространстве $L_2[0;1]$ найти расстояние от элемента $x(t) = t^n$ до множества

$$L = \left\{ x(t) \in L_2[0;1] : \int\limits_0^1 x(t)dt = 0 \right\}.$$

8.7. В пространстве l_2 найти расстояние от элемента $x = (1, 0, 0, ..., 0, ...)$ до подпространства

$$L = \left\{ x \in l_2, x = (x_1, x_2, ...) : \sum_{k=1}^{n} x_k = 0 \right\}.$$

8.8. В пространстве $L_2[0;1]$ найти расстояние от элемента $x(t) = t^2$ до подпространства P_1 всех линейных функций. Найти элемент наилучшего приближения x в P_1.

Глава 2. Линейные операторы

2.1. Линейные ограниченные операторы

Пусть X, Y — линейные пространства над полем $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) и множество $D(A) \subset X$. Если каждому элементу $x \in D(A)$ ставится в соответствие единственный элемент $y = Ax \in Y$, то говорят, что задан **оператор** $A : X \to Y$. При этом множество $D(A)$ называется **областью определения** оператора A. Множество $R(A) \subset Y$ элементов вида $y = Ax$, где $x \in D(A)$, называется **множеством значений** оператора A. Если Y является числовым полем, т. е. каждому $x \in D(A)$ ставится в соответствие число, то такой оператор называется **функционалом**.

В дальнейшем будем считать, что область определения $D(A)$ — линейное многообразие, т. е. если $x, y \in D(A)$, α, β — константы, то и $\alpha x + \beta y \in D(A)$.

Оператор $A : X \to Y$ называется **линейным**, если он удовлетворяет следующим свойствам:

1) $A(x + y) = Ax + Ay \ \forall\ x, y \in D(A)$(аддитивность);

2) $A(\lambda x) = \lambda Ax \ \forall\ x \in D(A) \ \forall\ \lambda \in \mathbb{K}$ (однородность).

Множество всех линейных ограниченных операторов, определенных на всем X и отображающих X в Y, будем обозначать $L(X, Y)$. Если $X = Y$, то для краткости $L(X, Y)$ будем обозначать $L(X)$. Если же $Y = \mathbb{K}$, т. е. $L(X, Y)$ — множество линейных ограниченных функционалов, определенных на X, то $L(X, Y)$ принято обозначать X^* и называть **сопряженным пространством** к X.

В случае, когда X, Y — линейные нормированные пространства, можем ввести следующие определения:

- оператор $A : X \to Y$ называется **непрерывным** в точке $x \in D(A)$, если для любой последовательности $x_n \in D(A)$, сходящейся к x по норме пространства X, выполнено $Ax_n \to Ax$

при $n \to \infty$ по норме пространства Y;

- оператор $A : X \to Y$ называется **ограниченным**, если существует такая константа M, что $\|Ax\| \leqslant M\|x\|$ для всех $x \in D(A)$.

Непрерывность оператора в одной точке влечет его непрерывность во всей области определения.

Линейный оператор является ограниченным тогда и только тогда, когда он непрерывен.

Наименьшая из констант M, участвующих в определении ограниченного оператора, называется **нормой** оператора и обозначается $\|A\|$. Эта константа может быть вычислена по формуле

$$\|A\| = \sup_{\substack{x \in D(A), \\ \|x\| \leqslant 1}} \|Ax\|.$$

Пример. *Показать, что оператор $A : X \to Y$ является линейным ограниченным, и найти его норму, если $X = Y = C[0;1]$ и*

$$Ax = Ax(t) = \int_0^t x(s)\,ds.$$

Решение. Заметим, что $D(A) = C[0;1]$. Линейность оператора A следует из свойств интеграла

$$A(x+y) = \int_0^t (x(s)+y(s))\,ds = \int_0^t x(s)\,ds + \int_0^t y(s)\,ds = Ax + Ay;$$

$$A(\lambda x) = \int_0^t \lambda x(s)\,ds = \lambda \int_0^t x(s)\,ds = \lambda Ax.$$

Проверим, что A — ограниченный оператор. Оценим $\|Ax\|$ сверху, зная, что $Y = C[0;1]$:

$$\|Ax\| = \max_{t \in [0;1]} |Ax(t)| = \max_{t \in [0;1]} \left| \int_0^t x(s)\,ds \right| \leqslant \max_{t \in [0;1]} \int_0^t |x(s)|\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \max_{t \in [0;1]} \int_0^t \max_{s \in [0;1]} |x(s)|\,ds = \|x\| \max_{t \in [0;1]} \int_0^t ds = \|x\|.$$

Следовательно, оператор A является ограниченным и $\|A\| \leqslant 1$.

С другой стороны,

$$\|A\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|Ax\| \geqslant \|Ax_0\|,$$

где x_0 — любой элемент из $C[0;1]$, такой, что $\|x_0\| \leqslant 1$. Выбирая в качестве такого элемента $x_0(t) \equiv 1$ на $[0;1]$, получим, что $\|Ax_0\| = 1$, а значит $\|A\| \geqslant 1$. Учитывая полученное выше неравенство противоположного смысла, получаем, что $\|A\| = 1$.

Задачи

В задачах 1.1–1.11 доказать, что оператор $A : X \to Y$ является линейным ограниченным и найти его норму.

1.1. Нулевой оператор $\Theta x = \theta_Y$ для всех $x \in X$, здесь θ_Y — нуль пространства Y и X, Y — любые линейные нормированные пространства над полем $\mathbb{K}$.

1.2. Тождественный оператор $Ix = x$ для всех $x \in X$, здесь $X = Y$ — произвольное линейное нормированное пространство.

1.3. $Ax = \alpha(t)\cdot x(t)$, здесь $X = Y = C[a;b]$, $\alpha(t) \in C[a;b]$.

1.4. $Ax = A(x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots)$, $X = Y = l_2$.

1.5. $Ax = Ax(t) = \int\limits_a^b x(s)\,ds$, $X = Y = C[a;b]$.

1.6. $Ax = Ax(t) = \int\limits_a^b e^{t-s}x(s)\,ds$, $X = Y = C[a;b]$.

1.7. $Ax = Ax(t) = \int\limits_0^1 t^n s^m x(s)\,ds$, $m, n \in \mathbb{N}$, $X = Y = C[0;1]$.

1.8. $Ax = Ax(t) = \int\limits_0^1 \sin\pi(t-s)x(s)\,ds$, $X = Y = C[0;1]$.

1.9. $Ax = Ax(t) = \begin{cases} x(t), & \text{если } t \le \lambda; \\ 0, & \text{если } t > \lambda, \end{cases}$
где λ — фиксированное число из интервала $(0;1)$, $X = Y = L_2[0;1]$.

1.10. $X = \mathbb{R}^n$, $Y = l_2$ и

$$Ax = A(x_1, \ldots, x_n) = \left(\frac{x_1}{1}, \ldots, \frac{x_n}{1}, \frac{x_1}{2}, \ldots, \frac{x_n}{2}, \ldots\right).$$

1.11. $Ax = Ax(t) = \dfrac{1}{2}(x(t) + x(-t))$, $X = Y = C[-1;1]$.

В задачах 1.12–1.15 проверить, является ли указанный оператор $A : X \to Y$ линейным непрерывным. Если да, найти его норму.

1.12. Оператор дифференцирования $Ax(t) = x'(t)$, $X = C^{(1)}[0;1]$, $Y = C[0;1]$.

1.13. Оператор дифференцирования $Ax(t) = x'(t)$, X — множество непрерывно дифференцируемых функций из $C[0;1]$, $Y = C[0;1]$.

1.14. Оператор умножения на независимую переменную $Ax = t \cdot x(t)$, $X = Y = C[a;b]$.

1.15. Оператор умножения на независимую переменную $Ax = t \cdot x(t)$, X — пространство функций $x(t) \in C[0;+\infty)$, для которых

$$\sup_{t\in[0;+\infty)} |tx(t)| < \infty,$$

$Y = C[0;+\infty)$.

1.16. Среди перечисленных ниже отображений выбрать те, которые являются линейными ограниченными функционалами в $C[0;1]$ и найти их норму:

а) $F(x(t)) = \displaystyle\int_0^1 x(t) \sin t\, dt;$

б) $F(x(t)) = \int\limits_0^t x(s)\sin s\, ds$;

в) $F(x(t)) = x(1/2)$;

г) $F(x(t)) = x(t)$;

д) $F(x(t)) = x'(1/2)$ определено на множестве непрерывно дифференцируемых функций из $C[0;1]$;

е) $F(x(t)) = x'(t)$ определено на множестве непрерывно дифференцируемых функций из $C[0;1]$;

ж) $F(x(t)) = \int x(t)\, dt$;

з) $F(x(t)) = \int\limits_0^1 |x(t)|\, dt$;

и) $F(x(t)) = \int\limits_0^1 x^2(t)\, dt$;

к) $F(x(t)) = \max\limits_{t\in[0;1]} |x(t)|$.

1.17. Найти норму оператора $A : L_p[a;b] \to L_q[a;b]$, $p \geqslant q$, задаваемого формулой $Ax = x$.

1.18. Является ли функционал

$$f(x) = f(x_1, x_2, \ldots) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{2^k}$$

линейным ограниченным в c_0? Если да, найти его норму.

1.19. Является ли функционал

$$f(x) = f(x_1, x_2, \ldots) = \lim_{n\to\infty} x_n$$

линейным ограниченным в c? Если да, найти его норму.

1.20. Является ли функционал

$$f(x) = f(x_1, x_2, \ldots) = -2009x_1 + 2010x_2 + 2011x_5$$

линейным ограниченным в l_∞? Если да, найти его норму.

1.21. Пусть $A : X \to Y$ — линейный оператор. Определить:

а) будет ли система элементов $Ax_1, Ax_2, \ldots, Ax_n$ линейно зависимой, если система элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n \in D(A)$ линейно зависима;

б) будет ли система $Ax_1, Ax_2, \ldots, Ax_n$ линейно независимой, если система элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n \in D(A)$ линейно независима?

1.22. Пусть на линейном пространстве X заданы две эквивалентные нормы, $A : X \to Y$ — линейный оператор. Доказать, что в обеих нормах этот оператор будет одновременно или ограниченным, или неограниченным.

1.23. Пусть $A : X \to Y$ — линейный ограниченный оператор. Доказать, что норма оператора может быть вычислена по формуле

$$\|A\| = \sup_{\substack{x \in D(A) \\ x \neq \theta_X}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|},$$

здесь θ_X — нуль пространства X.

1.24. Пусть H — гильбертово пространство, оператор $A : H \to H$ — линейный ограниченный. Доказать, что

$$\|A\| = \sup_{\substack{x \in D(A),\ y \in H \\ x \neq \theta_X,\ y \neq \theta_X}} \frac{|(Ax, y)|}{\|x\|\|y\|},$$

здесь θ_X — нуль пространства X.

1.25. Пусть $A : X \to Y$ — линейный оператор. Доказать, что множество значений $R(A)$ оператора A является линейным многообразием.

1.26. Пусть X, Y — полные пространства, $A : X \to Y$ — линейный ограниченный оператор. Определяют ли равенства:

а) $\|x\|_1 = \|Ax\|$,

б) $\|x\|_2 = \|x\| + \|Ax\|$

норму в пространстве X? Если да, то будет ли в этой норме X полным пространством?

1.27. Пусть X, Y — линейные пространства. Доказать что всякий линейный оператор $A : X \to Y$ переводит выпуклое множество из X в выпуклое множество в пространстве Y.

1.28. Пусть X, Y — линейные пространства, оператор $A : X \to Y$ линейный, $B \subset R(A)$ — выпуклое множество. Будет ли множество $M = \{x \in X : Ax \in B\}$ выпуклым?

2.2. Предел последовательности операторов

Пусть X, Y — линейные нормированные пространства. Будем говорить, что последовательность операторов $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \in L(X, Y)$ сходится **поточечно (сильно)** к оператору $A \in L(X, Y)$ и обозначать $A_n \to A$ при $n \to \infty$, если для любого $x \in X$ $\|A_n x - Ax\| \to 0$ при $n \to \infty$.

Последовательность операторов $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \in L(X, Y)$ сходится **равномерно (по норме)** к оператору $A \in L(X, Y)$ (обозначение: $A_n \rightrightarrows A$ при $n \to \infty$), если $\|A_n - A\| \to 0$ при $n \to \infty$.

Из равномерной сходимости следует поточечная сходимость, обратное неверно.

Пример. *Исследовать на сходимость последовательность операторов* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \in L(l_p)$, *таких, что*

$$A_n x = A_n(x_1, x_2, \ldots) = (x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots).$$

Решение. Покажем, что последовательность операторов $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к тождественному оператору $Ix = x$ в смысле поточечной сходимости, но не сходится равномерно.

1. Пусть $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_p$, тогда

$$\|A_n x - Ix\| = \|(x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots) - (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots)\|.$$

Следовательно,

$$\|A_n x - Ix\| = \|(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n}, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots)\| = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p}.$$

Так как $x \in l_p$, то $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty$, значит $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^p$ сходится к нулю как остаток сходящегося ряда. Таким образом, $\|A_n x - Ix\| \to 0$ при $n \to \infty$, а это означает, что последовательность операторов $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ поточечно сходится к тождественному оператору I.

2. Оценим норму разности операторов A_n и I:

$$\|A_n - I\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|A_n x - Ix\| \geqslant \|A_n x_0 - Ix_0\|,$$

где x_0 — любой элемент из l_p, такой, что $\|x_0\| \leqslant 1$. Выберем в качестве такого элемента x_0 последовательность $(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n}, 1, 0, 0, \ldots)$.

Очевидно, что она принадлежит l_p и $\|x_0\| = 1$, а значит

$$\|A_n - I\| \geqslant \|(0, 0, \ldots) - (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n}, 1, 0, \ldots)\| = \|(\underbrace{0, \ldots, 0}_{n}, 1, 0, \ldots)\| = \|x_0\| = 1.$$

Из этого неравенства следует, что $\|A_n - I\| \nrightarrow 0$ при $n \to \infty$. Таким образом, последовательность операторов $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ не сходится равномерно.

Задачи

Исследовать на сходимость последовательность операторов $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L(X)$.

2.1. X — произвольное линейное нормированное пространство, $A_n x = \dfrac{x}{n}$.

2.2. $X = l_p$, где $p \in [1; \infty)$,

а) $A_n x = A_n(x_1, x_2, \ldots) = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n}, x_1, x_2, \ldots)$;

б) $A_n x = A_n(x_1, x_2, \ldots) = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-1}, x_n, x_{n+1}, \ldots)$;

в) $A_n x = A_n(x_1, x_2, \ldots) = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{2n-1}, x_{2n}, x_{2n+1}, \ldots)$;

г) $A_n x = A_n(x_1, x_2, \ldots) = (0, 0, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$;

д) $A_n x = A_n(x_1, x_2, \ldots) = (\lambda_{1,n} x_1, \lambda_{2,n} x_2, \ldots)$, где векторы $\lambda_n = (\lambda_{1,n}, \lambda_{2,n}, \ldots)$ принадлежат l_∞ и сходятся по норме этого пространства к вектору $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$;

е) $A_n x = A_n(x_1, x_2, \ldots) = (\lambda_{1,n} x_1, \lambda_{2,n} x_2, \ldots)$, где $\lambda_{k,n}$ ограничены и для любого $k \in \mathbb{N}$ выполнено $\lambda_{k,n} \to \lambda_k$ при $n \to \infty$;

ж) $A_n x = A_n(x_1, x_2, \ldots) = (x_n, x_{n+1}, \ldots)$;

з) $A_n x = (x_2, x_3, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n} + x_{2n+1}, x_{2n+1} + x_{2n+2}, \ldots)$;

и) $A_n x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n}, x_{2n+1}, x_{2n+2}, \ldots)$;

к) $A_n x = (x_1, x_2, \ldots, x_{2n}, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n}, x_{2n+1}, x_{2n+2}, \ldots)$.

2.3. $X = c_0$, $A_n x = A_n(x_1, x_2, \ldots) = (x_n, x_{n+1}, \ldots)$.

2.4. $X = c$, $A_n x = A_n(x_1, x_2, \ldots) = (x_n, x_{n+1}, \ldots)$.

2.5. $X = C[0;1]$.

а) $A_n x = A_n x(t) = t^n(1-t)x(t)$;

б) $A_n x = A_n x(t) = t^n x(t)$;

в) $A_n x = A_n x(t) = \int\limits_{t/2}^{t/2+1/n} x(s)\,ds$;

г) $A_n x = A_n x(t) = \int\limits_0^t \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{s^k}{k!} x(s)\,ds$;

д) $A_n x = A_n x(t) = \int\limits_{1/n}^{1-1/n} K(t,s)x(s)\,ds$, где $K(t,s)$ — функция, непрерывная на $[0;1]^2$;

е) $A_n x = A_n x(t) = \int\limits_0^1 K_n(t,s)x(s)\,ds$, где $K_n(t,s)$ — непрерывные на $[0;1]^2$ функции, равномерно при $n \to \infty$ сходящиеся к функции $K(t,s)$;

ж) $A_n x = A_n x(t) = a_n(t)x(t)$, где $\{a_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность непрерывных на отрезке $[0;1]$ функций, сходящаяся равномерно при $n \to \infty$ к $a(t) \in C[0;1]$.

2.3. Теорема Хана — Банаха

Пусть на линейном нормированном подпространстве X_0 линейного нормированного пространства X задан линейный ограниченный функционал. Часто возникает необходимость продолжить этот функционал на все пространство X с сохранением нормы. О возможности такого продолжения говорится в теореме Хана — Банаха.

Теорема Хана — Банаха. *Пусть X — линейное нормированное пространство, X_0 — его линейное подпространство, $f_0 \in X_0^*$. Тогда f_0 можно продолжить на все X с сохранением нормы, т. е. найдется такой функционал $f \in X^*$, что*

1) $f(x) = f_0(x) \quad \forall\, x \in X_0$,

2) $\|f\| = \|f_0\|$.

Задачи

Доказать утверждения.

3.1. Пусть X — линейное нормированное пространство, $x_0 \in X$, $x_0 \neq \theta$. Тогда существует $f \in X^*$, обладающий свойствами:

1) $\|f\| = 1$,

2) $f(x_0) = \|x_0\|$.

3.2. Пусть X — линейное нормированное пространство, X_0 — его линейное подпространство, $x_0 \in X \setminus X_0$, $d = \rho(x_0, X_0) > 0$. Тогда существует $f \in X^*$, обладающий свойствами:

1) $f(x_0) = 1$,

2) $f(y) = 0 \quad \forall\, y \in X_0$,

3) $\|f\| = 1/d$.

3.3. Пусть X — линейное нормированное пространство, $x_0, y_0 \in X$, $x_0 \neq y_0$. Тогда существует $f \in X^*$, обладающий свойствами:

1) $\|f\| = 1$;

2) $f(x_0) \neq f(y_0)$.

3.4. Пусть X — линейное нормированное пространство, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$, $M > 0$. Показать, что для существования функционала $f \in X^*$, удовлетворяющего условиям $f(x_n) = c_n$ и $\|f\| \leqslant M$, необходимо и достаточно, чтобы для каждого натурального n и любых вещественных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ выполнялось неравенство

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k c_k\right| \leqslant M \left\|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right\|.$$

3.5. Пусть X — линейное нормированное пространство, X_0 — его линейное подпространство. Доказать, что X_0 всюду плотно в X тогда и только тогда, когда каждый функционал $f \in X^*$, равный нулю на X_0, обращается в нуль тождественно.

2.4. Сопряженные пространства

Напомним, что **сопряженным пространством** к X (обозначается X^*) называется множество линейных ограниченных функционалов, определенных на линейном нормированном пространстве X.

Во многих банаховых пространствах можно указать общий вид линейного ограниченного функционала, что позволяет описать сопряженное пространство. Для этого нам потребуется следующее определение: пусть X, Y — линейные нормированные пространства; X и Y **изометрически изоморфны**, если между ними можно установить изоморфизм B, сохраняющий норму (т. е. $\|x\|_X = \|B(x)\|_Y$).

1. Гильбертово пространство $\mathbf{H}$.
Каждый функционал $f \in H^*$ может быть единственным образом представлен в виде

$$f(x) = (x, y),$$

где y — фиксированный элемент из H, причем $\|f\| = \|y\|$.

Если H — евклидово пространство, то сопряженное пространство H^* изометрически изоморфно H.

2. Пространство $\mathbf{L_p[a; b]}$, $\mathbf{1 < p < \infty}$.
Каждый функционал $f \in (L_p[a;b])^*$ может быть единственным образом представлен в виде

$$f(x) = \int_a^b x(t)y(t)\,dt,$$

где $y = y(t)$ — фиксированный элемент из $L_q[a;b]$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, причем $\|f\| = \|y\|$.

Пространство $(L_p[a;b])^*$ изометрически изоморфно $L_q[a;b]$.

3. Пространство $\mathbf{L_1[a; b]}$.
Каждый функционал $f \in (L_1[a;b])^*$ может быть единственным образом представлен в виде

$$f(x) = \int_a^b x(t)y(t)\,dt,$$

где $y = y(t)$ — фиксированный элемент из $L_\infty[a;b]$, причем $\|f\| = \|y\|$.

Пространство $(L_1[a;b])^*$ изометрически изоморфно $L_\infty[a;b]$.

4. Пространство $\mathbf{C[a;b]}$.
Каждый функционал $f \in (C[a;b])^*$ может быть единственным образом представлен в виде интеграла Стилтьеса

$$f(x) = \int_a^b x(t)\,dy(t),$$

где $y = y(t)$ — фиксированный элемент из $V[a;b]$, $y(t-0) = y(t)$ на $[a;b]$, $y(a) = 0$, причем $\|f\| = \|y\|$.

Сопряженное пространство $(C[a;b])^*$ изометрически изоморфно пространству функций $x(t)$ из $V[a;b]$, обладающих свойствами $x(t-0) = x(t)$ на $[a;b]$, $x(a) = 0$, с нормой пространства $V[a;b]$.

5. Пространство $\mathbf{l_p}$, $\mathbf{1 < p < \infty}$.
Пусть $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in l_p$. Каждый функционал $f \in l_p^*$ может быть единственным образом представлен в виде

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k,$$

где $y = \{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ — фиксированный элемент из l_q, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, причем $\|f\| = \|y\|$.

Сопряженное пространство l_p^* изометрически изоморфно l_q.

6. Пространство $\mathbf{l_1}$.
Пусть $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in l_1$. Каждый функционал $f \in l_1^*$ может быть единственным образом представлен в виде

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k,$$

где $y = \{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ — фиксированный элемент из l_∞, причем $\|f\| = \|y\|$.

Сопряженное пространство l_1^* изометрически изоморфно l_∞.

7. Пространство $\mathbf{c_0}$.
Пусть $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in c_0$. Каждый функционал $f \in c_0^*$ может быть единственным образом представлен в виде

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k,$$

где $y = \{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ — фиксированный элемент из l_1, причем $\|f\| = \|y\|$.

Сопряженное пространство c_0^* изометрически изоморфно l_1.

8. Пространство c.

Пусть $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in c$. Каждый функционал $f \in c^*$ может быть единственным образом представлен в виде

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k y_k,$$

где $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $y = \{y_k\}_{k=0}^{\infty}$ — фиксированный элемент из l_1, причем $\|f\| = \|y\|$.

Сопряженное пространство c^* изометрически изоморфно l_1.

Пример. *Найти элемент y, соответствующий функционалу*

$$f(x) = f(x_1, x_2, \ldots) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) x_n,$$

если $f \in l_1^*$, и найти норму этого функционала.

Решение. Так как каждый функционал $f \in l_1^*$ может быть единственным образом представлен в виде

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k,$$

где $y = \{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ — некоторый элемент из l_∞, то естественно предположить, что функционалу f соответствует

$$y = \left(0, 1 - \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{3}, \ldots\right).$$

Очевидно, что y — ограниченная числовая последовательность, так как

$$\sup_k |y_k| = 1 < \infty,$$

т. е. $y \in l_\infty$. Так как такое представление функционала $f = f(x)$ единственно, то наше предположение оказалось верным. Найдем норму функционала f:

$$\|f\| = \|y\|_{l_\infty} = \sup_k |y_k| = \sup_{k=1,2,\ldots} \left|1 - \frac{1}{k}\right| = 1.$$

Задачи

4.1. Доказать утверждение об общем виде функционала из X^*, если X равно: а) l_1, б) c, в) c_0.

В задачах 4.2–4.7 найти элемент y, соответствующий функционалу $f \in X^*$. Найти $\|f\|$.

4.2. $X = L_p[-1,1], p > 1$.

а) $f(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int\limits_{-1}^{1}(t+1)x(t)\,dt$;

б) $f(x) = a^{-1/q}\displaystyle\int\limits_{-a}^{a}x(t)\,dt$, $a \in (0,1]$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$;

в) $f(x) = \displaystyle\int\limits_{-1}^{0}x(t)\,dt - \int\limits_{0}^{1}x(t)\,dt$;

г) $f(x) = \alpha\displaystyle\int\limits_{0}^{1}x(t^\alpha)\,dt$, $\alpha \in (0;1]$.

4.3. $X = l_p, p > 1$.

а) $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots) = x_5$;

б) $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots) = 2^{-1/q}x_3 - 2^{-1/q}x_7$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$;

в) $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{n}$.

г) $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{2^{n/q}}$.

4.4. $X = l_1$.

а) $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots) = x_8$;

б) $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots) = -6x_2 + 8x_4$;

в) $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}x_n$;

г) $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x_n}{n}$;

д) $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x_n}{2^n}$.

4.5. $X = c$ и $X = c_0$.

а) $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots) = x_1$;

б) $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots) = -2009x_1 + 2010x_2 + 2011x_3$;

в) $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots) = x_1 - \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

4.6. $X = C[0, 1]$.

а) $f(x) = \int\limits_0^1 x(\sqrt{t})\, dt$;

б) $f(x) = \int\limits_0^1 x(t^2)\, dt$;

в) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 x(t^n)\, dt$;

г) $f(x) = \int\limits_0^1 a(t)x(t)\, dt + \sum\limits_{k=1}^{n} a_k x(t_k)$, где $a \in C[0, 1]$, $a_k \in \mathbb{C}$, $0 \le t_1 < \ldots < t_n \le 1$.

4.7. $X = C[-1, 1]$.

а) $f(x) = \int\limits_{-1}^1 x(t)\, dt$;

б) $f(x) = \int\limits_{-1}^0 x(t)dt - \int\limits_0^1 x(t)\, dt$;

в) $f(x) = \int\limits_{-1}^{1} a(t)x(t)\,dt$, где $a \in C[-1,1]$;

г) $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k x(t_k)$, где $-1 \leq t_1 < \ldots < t_n \leq 1$, $a_k \in \mathbb{C}$;

д) $f(x) = a^{-1} \int\limits_{-a}^{a} x(t)\,dt$, $a \in (0,1]$.

2.5. Слабая сходимость

Слабая сходимость элементов линейного нормированного пространства

Пусть X является линейным нормированным пространством, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность элементов из X, $x \in X$. Ранее было введено понятие сходимости $x_n \to x$ при $n \to \infty$. Напомним, что $x_n \to x$, если $\|x_n - x\| \to 0$ при $n \to \infty$. Такой тип сходимости называется **сильной** сходимостью или **сходимостью по норме** пространства X.

Используя понятие сопряженного пространства, вводят еще один тип сходимости в пространстве X. Будем говорить, что x_n сходится при $n \to \infty$ к элементу x **слабо** (обозначается $x_n \rightharpoonup x$), если $f(x_n) \to f(x)$ при $n \to \infty$ для любого функционала $f \in X^*$.

Если последовательность x_n сходится к элементу x сильно, то x_n сходится и слабо, причем к тому же элементу. Обратное неверно.

Слабая сходимость операторов

Пусть X, Y — линейные нормированные пространства, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность операторов из $L(X,Y)$, $A \in L(X,Y)$. Ранее в пространстве $L(X,Y)$ рассматривались два типа сходимости последовательности операторов:

- **равномерная** (или **сходимость по норме** в $L(X,Y)$):
  $A_n \rightrightarrows A$ при $n \to \infty$, если $\|A_n - A\| \underset{n\to\infty}{\to} 0$;
- **поточечная** (или **сильная**):
  $A_n \to A$ при $n \to \infty$, если $\|A_n x - Ax\| \underset{n\to\infty}{\to} 0 \ \forall\, x \in X$.

Еще одним типом сходимости операторов является слабая сходимость. Говорят, что A_n сходится к A **слабо** (обозначают $A_n \rightharpoonup A$), если $A_n x \rightharpoonup Ax$ при $n \to \infty$ для любого $x \in X$.

Из равномерной сходимости следует сильная, из сильной — слабая. Обратное неверно.

Задачи

5.1. Совпадает ли сильная и слабая сходимости в пространствах: $\mathbb{R}^n$; l_1; l_p, $p > 1$?

5.2. Исследовать на слабую сходимость следующие последовательности:

а) $x_n = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0, \dots\right) \in X$, если $X = c_0$, l_1, l_p $(p > 1)$;

б) $x_n = \left(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right) \in X$, если $X = c_0$, l_1, l_p $(p > 1)$;

в) $x_n = \left(\underbrace{1, \dots, 1}_{n-1}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots\right) \in X$, если $X = c_0$, l_p $(p > 1)$;

г) $x_n = \left(\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}, 1, 0 \dots\right) \in X$, если $X = c_0$, l_1, l_p $(p > 1)$.

5.3. Какие из последовательностей:

а) $x_n(t) = t^n - t^{n+1}$;

б) $x_n(t) = \begin{cases} 2n(1 - nt), & \text{если } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{n}; \\ 0, & \text{если } \frac{1}{n} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$

сходятся в пространстве $L_2[0; 1]$ слабо?

5.4. В вещественном пространстве $L_2[0; 1]$ исследовать на сильную и слабую сходимость последовательность $x_n(t) = \sin \pi n t$.

5.5. Пусть X — линейное нормированное пространство, $x_n, y_n, x, y \in X$ и $x_n \rightharpoonup x$, $y_n \rightharpoonup y$ при $n \to \infty$. Показать, что если при $n \to \infty$ числовые последовательности $\alpha_n \to \alpha$ и $\beta_n \to \beta$, то последовательность $\alpha_n x_n + \beta_n x_n \rightharpoonup \alpha x + \beta y$.

5.6. Пусть $A \in L(X, Y)$, $x_n, x_0 \in X$, $x_n \rightharpoonup x_0$ при $n \to \infty$. Показать, что $Ax_n \rightharpoonup Ax_0$ при $n \to \infty$.

5.7. Исследовать на слабую сходимость последовательность $A_n \in L(l_p)$, $p \geqslant 1$,

$$A_n x = A_n(x_1, x_2, \ldots) = (x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots).$$

5.8. Пусть X — линейное нормированное пространство, $A_n, B_n, A, B \in L(X)$, $A_n \rightharpoonup A$, $B_n \to B$. Показать, что $A_n B_n \rightharpoonup AB$.

5.9. Пусть H — гильбертово пространство. Доказать, что скалярное произведение в H не обладает свойством непрерывности по отношению к слабой сходимости, т. е. если $x_n \rightharpoonup x_0$, $y_n \rightharpoonup y_0$, то не всегда $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$.

5.10. Пусть H — гильбертово пространство, элементы x_0, y_0, x_n, y_n принадлежат H и $x_n \to x_0$, $y_n \rightharpoonup y_0$. Доказать, что $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$.

5.11. Пусть X — банахово пространство. Будем говорить, что множество $M \subset X$ *слабо ограничено*, если для любого $f \in X^*$ числовое множество $\{f(x) : x \in M\}$ ограничено. Доказать, что каждое ограниченное множество в X слабо ограничено и, наоборот, каждое слабо ограниченное множество ограничено.

5.12. Пусть x_0, $x_n \in H$, где H — гильбертово пространство, и $x_n \rightharpoonup x_0$, $\|x_n\| \to \|x_0\|$. Доказать, что $x_n \to x_0$ (по норме).

2.6. Сопряженный оператор

Пусть X, Y — линейные нормированные пространства, $A \in L(X, Y)$. Для каждого функционала $g \in Y^*$ построим функционал по правилу $f(x) = g(Ax) \in X^*$. Таким образом, каждому функционалу $g \in Y^*$ поставлен в соответствие функционал $f \in X^*$. Полученное отображение называется оператором, **сопряженным** к A, и обозначается A^*:

$$A^* : Y^* \to X^*.$$

Пример. *Для оператора $A \in L(l_1)$ найти сопряженный оператор A^*, если*

$$Ax = A(x_1, x_2, ...) = \left(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-1}, x_1, 0, 0, ... \right).$$

Решение. Пусть функционал $g \in l_1^*$. Тогда сопряженный оператор A^* будет действовать на этот элемент g следующим образом: $(A^*g)(x) = g(Ax) = g\left(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-1}, x_1, 0, 0, ... \right)$. А так как $g \in l_1^*$, то он может быть единственным образом представлен в виде

$$g(x) = g(x_1, x_2, ...) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k,$$

где $y = \{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ — некоторый элемент из l_∞. Отсюда следует, что существует такая последовательность $y = \{y_k\}_{k=1}^{\infty} \in l_\infty$, что

$$g\left(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-1}, x_1, 0, 0, ... \right) = x_1 y_n.$$

С другой стороны, так как сопряженный оператор каждому функционалу $g \in l_1^*$ ставит в соответствие функционал $f \in l_1^*$, этот функционал также имеет единственное представление в виде

$$f(x) = f(x_1, x_2, ...) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \tilde{y}_k,$$

где $\tilde{y} = \{\tilde{y}_k\}_{k=1}^{\infty} \in l_\infty$, то

$$g(Ax) = f(x) = f\,(x_1, x_2, ...) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \tilde{y}_k.$$

Таким образом,

$$(A^*g)(x) = g(Ax) = x_1 y_n = f(x) = f\,(x_1, x_2, ...) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \tilde{y}_k.$$

Отсюда естественно предположить, что $\tilde{y} = (y_n, 0, 0, \ldots)$. Очевидно, что $\tilde{y} \in l_\infty$, и так как представление функционала $f = f(x)$ единственно, наше предположение оказалось верным.

Следовательно, сопряженный оператор A^* каждому функционалу $g \in l_1^*$, построенному с помощью элемента $y = (y_1, y_2, ...) \in l_\infty$, ставит в соответствие функционал $f \in l_1^*$, построенный с помощью элемента $\tilde{y} = (y_n, 0, 0, \ldots) \in l_\infty$.

Задачи

6.1. Пусть $A, B \in L(X, Y)$. Проверить, что выполняются следующие свойства:

а) $(A + B)^* = A^* + B^*$;

б) $(\lambda A)^* = \lambda A^*$, где $\lambda \in \mathbb{K}$;

в) $I^* = I$, где I — тождественный оператор.

6.2. Пусть $A \in L(X, Y)$, $B \in L(Y, Z)$. Показать, что $(BA)^* = A^* B^*$.

6.3. Пусть оператор $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ задается матрицей $\mathcal{A} = \|a_{i,j}\|_{n\times m}$. Какова матрица сопряженного оператора?

6.4. Найти A^* для $A \in L(X)$, если $X = l_p$ $(p \in [1, \infty))$, c и c_0, при условии:

а) $Ax = A(x_1, x_2, ...) = (x_2, x_3, x_4, ...)$;

б) $Ax = A(x_1, x_2, ...) = (0, x_1, x_2, x_3, ...)$;

в) $Ax = A(x_1, x_2, ...) = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \lambda_3 x_3, ...)$, где $(\lambda_1, \lambda_2, ...)$ является элементом пространства l_∞;

г) $Ax = A(x_1, x_2, ...) = \left(x_2, \dfrac{x_3}{2}, \dfrac{x_4}{3}, ...\right)$.

6.5. Для оператора A найти сопряженный оператор A^*, если:

а) $Ax(t) = \alpha(t)x(t) \in L(C[0,1])$, где $\alpha \in C[0,1]$;

б) $Ax(t) = \alpha(t)x(t) \in L(L_p[0,1])$, $p \in [1,\infty]$, где $\alpha \in L_\infty[0,1]$;

в) $Ax(t) = \int\limits_0^t x(s)\,ds \in L(L_p[0,1])$, $p \in [1,\infty]$;

г) $A \in L(L_p[0,1])$, $p \in [1,\infty)$,

$$Ax(t) = \begin{cases} x(t+a), & \text{если } t+a \leqslant 1,\ a \in [0,1], \\ x(t+a-1), & \text{если } t+a > 1,\ a \in [0,1]; \end{cases}$$

д) $Ax = A(x_1, x_2, ...) = (0, 0, \alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, ...) \in L(l_p)$, где $p \in [1,\infty)$ и $(\alpha_1, \alpha_2, ...) \in l_\infty$;

е) $Ax = A(x_1, x_2, ...) = (x_1, x_2, ..., x_n, 0, 0, ...) \in L(l_p)$, где $p \in [1,\infty)$;

ж) $Ax = A(x_1, x_2, ...) = (\alpha_n x_n, \alpha_{n+1} x_{n+1}, ...) \in L(l_p)$, где $p \in [1,\infty)$, $n \in \mathbb{N}$ и $(\alpha_1, \alpha_2, ...) \in l_\infty$;

з) $Ax(t) = \dfrac{1}{2}(x(t) + x(-t)) \in L(L_p[-1,1])$, $p \in (1,\infty)$;

и) $Ax(t) = x(t^\alpha) \in L(L_2[0,1])$, где $\alpha > 0$.

2.7. Обратный оператор

Системы линейных уравнений, некоторые интегральные и дифференциальные уравнения сводят к операторному уравнению вида

$$Ax = y, \tag{1}$$

где y — фиксированный элемент некоторого линейного пространства Y, x — искомый элемент линейного пространства X, $A : X \to Y$ — известный линейный оператор. Таким образом, появляется возможность рассматривать вопрос о существовании и единственности решения всех задач такого типа без учета особенностей, присущих конкретной задаче. Естественным образом при этом возникает понятие обратного оператора.

Определим сначала левый и правый обратные операторы к линейному оператору $A : X \to Y$. Пусть A_l^{-1} и A_r^{-1} — операторы, отображающие $R(A)$ в X. Оператор A_l^{-1} будем называть **левым обратным** к оператору A, если

$$A_l^{-1}Ax = x \text{ для всех } x \in D(A),$$

A_r^{-1} — **правым обратным** к оператору A, если

$$AA_r^{-1}y = y \text{ для всех } y \in R(A).$$

Если у линейного оператора $A : X \to Y$ существуют левый и правый обратные операторы, то они совпадают. При этом будем говорить, что линейный оператор $A : X \to Y$ имеет **обратный** $A^{-1} : Y \to X$ (или, иначе, **обратим**), причем $A^{-1} = A_r^{-1} = A_l^{-1}$ и $D(A^{-1}) = R(A)$.

Следовательно, оператор A будет обратимым тогда и только тогда, когда уравнение (1) для любого $y \in R(A)$ имеет единственное решение (или, другими словами, A осуществляет взаимно однозначное соответствие между $D(A)$ и $R(A)$.

Вопрос о существовании обратного оператора может быть решен, например, с помощью следующего утверждения.

Теорема. *Пусть $A : X \to Y$ — линейный оператор. Тогда существует обратный оператор A^{-1}, определенный на $R(A)$, тогда и только тогда, когда $\operatorname{Ker} A = \{x \in X : Ax = \theta_Y\}$ содержит лишь нулевой элемент θ_X пространства X.*

Если у линейного оператора A существует обратный A^{-1}, то он также будет линеен, но свойство ограниченности сохраняется не всегда.

Теорема. *Пусть $A : X \to Y$ — линейный ограниченный оператор. Тогда существует ограниченный обратный оператор A^{-1}, определенный на $R(A)$, в том и только том случае, когда найдется такая константа $m > 0$, что $\|Ax\| \geqslant m\|x\|$ для каждого $x \in X$.*

Теорема (Банаха об обратном операторе). *Пусть A — линейный ограниченный оператор, взаимно однозначно отображающий банахово пространство X на банахово пространство Y. Тогда обратный оператор A^{-1} ограничен.*

Задачи

7.1. Пусть $A \in L(X, Y)$. Доказать, что если обратный оператор A^{-1} существует, то он единственный.

7.2. Пусть $X = l_p$, $p \in [1, \infty]$ и $x = (x_1, x_2, x_3, ...) \in X$. Определим на этом пространстве оператор правого сдвига

$$T_r x = (0, x_1, x_2, x_3, ...)$$

и оператор левого сдвига

$$T_l x = (x_2, x_3, x_4, ...).$$

Что можно сказать об обратимости этих операторов? О существовании левого и правого обратных операторов?

7.3. Пусть $X = l_p$, $p \in [1, \infty]$, $a = (a_1, a_2, a_3, ...) \in l_\infty$ и $x = (x_1, x_2, x_3, ...) \in X$. Доказать, что для оператора

$$Ax = (a_1 x_1, a_2 x_2, a_3 x_3, ...)$$

существует обратный оператор A^{-1} тогда и только тогда, когда $\inf\limits_{i \in \mathbb{N}} |a_i| > 0$. Найти A^{-1}.

7.4. Показать, что в пространстве l_2:

а) оператор $Ax = (0, x_1, 0, x_2, 0, x_3, ...)$ не имеет правого обратного из $L(l_2)$, но имеет левый обратный из $L(l_2)$;

б) оператор $Bx = (x_1, x_2, x_4, x_8, x_{16}, ...)$ не имеет левого обратного из $L(l_2)$, но имеет правый обратный из $L(l_2)$.

7.5. Пусть $X = C[0,1]$, $Ax(t) = a(t)x(t)$ — оператор умножения на непрерывную функцию $a(t)$, определенный на X. Найти необходимые и достаточные условия, при которых этот оператор обратим. Какой вид будет иметь обратный оператор?

7.6. Пусть $X = C[0,1]$. Проверить, что оператор $A : X \to X$, действующий по правилу

$$Ax(t) = \int\limits_0^t x(s)\,ds, \ t \in [0,1],$$

обратим, но A^{-1} не ограничен.

7.7. Пусть оператор $A : C^{(1)}[0,1] \to C[0,1]$, $Ax(t) = x'(t)$. Что можно утверждать о существовании обратного оператора? Левого и правого обратных?

7.8. Пусть $x = (x_1, x_2, x_3, ...) \in l_2$. Проверить, существует ли непрерывный обратный оператор $A^{-1} \in L(l_2)$ к оператору $A : l_2 \to l_2$, если:

а) $Ax = (x_3, x_1, x_2, x_4, x_5, ...)$;

б) $Ax = (x_1 + 2x_2, x_1 - x_2, x_3, x_4, ...)$;

в) $Ax = (x_2 - x_1, x_2 + x_3, 2x_2 - 2x_1, x_4, x_5, ...)$;

г) $Ax = (x_1 + x_2, x_2, x_3, ...)$.

7.9. В пространстве $C[0,1]$ рассмотрим операторы A и B, определяемые формулами:

$$Ax(t) = (t+1)x(t), \ Bx(t) = x(t^2), \ t \in [0,1].$$

Чему равны $(AB)^{-1}$ и $(BA)^{-1}$?

7.10. Пусть X, Y, Z — банаховы пространства. Даны операторы $A \in L(X, Y)$, $B \in L(Y, Z)$. Существует ли ограниченный обратный к оператору BA, если:

а) существуют $A^{-1} \in L(Y, X)$, $B^{-1} \in L(Z, Y)$;
б) существует $A^{-1} \in L(Y, X)$, не существует $B^{-1} \in L(Z, Y)$;
в) не существует ни $A^{-1} \in L(Y, X)$, ни $B^{-1} \in L(Z, Y)$?

7.11. Пусть $A : X \to Y$ — линейный ограниченный оператор. Доказать, что если найдется последовательность $x_n \in X$, такая, что $\|x_n\| = 1$ и $Ax_n \to \theta_Y$ при $n \to \infty$ по норме пространства Y, то оператор A не имеет обратного.

2.8. Спектр, резольвента

Будем рассматривать операторное уравнение

$$(A - \lambda I)x = y, \tag{1}$$

где x — искомый элемент из банахова пространства X, y — фиксированный элемент из X, $A \in L(X)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Задача о существовании и единственности решения уравнения (1) сводится к вопросу об обратимости оператора $A - \lambda I$ в зависимости от параметра λ.

Значения параметра λ, для которых существует обратный к оператору $A - \lambda I$, определенный на всем X, называются **регулярными значениями** оператора A, при этом оператор $R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$ называется **резольвентой** оператора A. В силу полноты пространства X оператор $R_\lambda(A)$ будет ограниченным. Множество всех регулярных значений оператора A называют **резольвентным множеством** и обозначают $\rho(A)$.

Множество значений параметра λ, для которых не существует оператора $(A - \lambda I)^{-1}$, определенного на всем X, называется **спектром** оператора A и обозначается $\sigma(A)$.

Спектр оператора принято делить на компоненты. Для этого рассмотрим случаи, при которых оператор $A - \lambda I$ не имеет обратного, т. е. $A - \lambda I$ не является изоморфизмом X на X.

1. Оператор $A - \lambda I$ не является мономорфизмом, тогда ядро этого оператора $\ker(A - \lambda I)$ содержит ненулевой элемент. В этом случае существует ненулевое решение уравнения

$$Ax = \lambda x.$$

Значение λ, для которого выполняется это свойство, называется **собственным значением** оператора A, ненулевое решение x — **собственным вектором**, соответствующим собственному значению λ. Множество собственных значений оператора A обозначается $\sigma_p(A)$ и называется **точечным спектром**.

2. Оператор $A - \lambda I$ — мономорфизм, но не эпиморфизм X на X. Тогда $A - \lambda I$ осуществляет взаимно однозначное соответствие между X и $(A - \lambda I)(X)$. Значит, существует обратный оператор $(A - \lambda I)^{-1}$, определенный на подмножестве $(A - \lambda I)(X)$ множества X.

Пример. *Найти резольвентное множество, резольвенту, собственные значения и соответствующие им собственные векторы* *оператора* $A \in C[a;b]$, *если*

$$Ax = Ax(t) = tx(t).$$

Решение. Для данного оператора уравнение $(A-\lambda I)x = y$ примет вид

$$(t-\lambda)x(t) = y(t), \quad t \in [a;b].$$

Выясним, при каких λ это уравнение для каждого y имеет единственное решение. Выразим $x(t)$ через $y(t)$, получим

$$x(t) = \frac{1}{t-\lambda}y(t), \quad t \in [a;b].$$

Поэтому обратный оператор, определенный на всем пространстве $C[a;b]$, (резольвента), существует, если $\lambda \notin [a;b]$, и задается равенством

$$R_\lambda(A)y = (A-\lambda I)^{-1}y = \frac{1}{t-\lambda}y(t), \quad t \in [a;b].$$

При $\lambda \in [a;b]$ обратный оператор определен не для всех $y \in C[a;b]$. Поэтому $\rho(A) = \mathbb{C} \setminus [a;b]$ и $\sigma(A) = [a;b]$.

Выясним, какие точки спектра будут являться собственными значениями. Для этого рассмотрим уравнение $Ax = \lambda x$, переписанное в виде

$$tx(t) = \lambda x(t), \quad t \in [a;b].$$

Ясно, что это уравнение может иметь только нулевое решение. Поэтому у оператора A нет собственных значений.

Задачи

Найти резольвентное множество, резольвенту, собственные значения и соответствующие им собственные векторы оператора $A \in L(X)$.

8.1. $Ax = A(x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, 0, x_3, \ldots)$, $X = l_p$, $p \geqslant 1$.

8.2. $Ax = A(x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, x_2, 0, x_4, x_5, 0, \ldots)$, $X = l_p$, $p \geqslant 1$.

8.3. $Ax = A(x_1, x_2, \ldots) = (x_2, x_1, x_4, x_3, \ldots)$, $X = l_p$, $p \geqslant 1$.

8.4. $Ax = A(x_1, x_2, \ldots) = (x_3, x_2, x_1, x_6, x_5, x_4, \ldots)$, $X = l_p$, $p \geqslant 1$.

8.5. $Ax = A(x_1, x_2, \ldots) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, \ldots)$, $X = l_p$, $p \geqslant 1$.

8.6. $Ax = A(x_1, x_2, \ldots) = (x_1 + x_2, x_2, x_3, \ldots)$, $X = l_\infty$.

8.7. $Ax = A(x_1, x_2, \ldots) = (-x_1, x_2, -x_3, x_4, \ldots)$, $X = l_\infty$.

8.8. $Ax = Ax(t) = (t+1)x(t)$, $X = C[a; b]$.

8.9. $Ax = Ax(t) = \alpha(t)x(t)$, $\alpha \in C[a; b]$, $X = C[a; b]$.

8.10. $Ax = Ax(t) = e^{it}x(t)$, $X = C[0; 2\pi]$.

8.11. $Ax = Ax(t) = -x(-t)$, $X = C[-2; 2]$.

8.12. $Ax = Ax(t) = x(-t)$, $X = C[-2; 2]$.

8.13. $Ax = Ax(t) = x(1-t)$, $X = C[0; 1]$.

8.14. $Ax = Ax(t) = x(0) + tx(1)$, $X = C[0; 1]$.

8.15. Показать, что если у оператора A^2 есть собственное значение, то и у оператора A есть собственное значение.

Глава 3. Компактные множества и операторы

3.1. Компактные множества

Пусть X — метрическое пространство, $M \subset X$.

Если из каждой последовательности x_n элементов множества M можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к элементу множества M, то множество M называется **секвенциально компактным**.

Семейство открытых множеств $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$, где A — некоторое множество, называется **открытым покрытием** множества M, если

$$\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha \supset M.$$

Множество M в метрическом пространстве называется **компактным**, если из любого открытого покрытия этого множества можно выделить конечное подпокрытие, то есть покрытие, состоящее из конечного числа множеств.

Теорема. *Для того, чтобы множество в метрическом пространстве было компактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было секвенциально компактным.*

Множество M называется **предкомпактным**, если его замыкание компактно. Любое компактное множество является предкомпактным, обратное неверно.

Понятие компактного множества связано с понятием вполне ограниченного множества.

Пусть $\varepsilon > 0$, множество S называется **ε-сетью** для множества M, если для каждого элемента $x \in M$ найдется такой элемент $y \in S$, что $\rho(x, y) < \varepsilon$. Множество M называется **вполне ограниченным**, если для любого ε для M существует конечная ε-сеть. Каждое вполне ограниченное множество является ограниченным, обратное неверно.

Предкомпактные и вполне ограниченные множества связывает следующая теорема:

Теорема (Хаусдорфа). *Для того, чтобы множество в метрическом пространстве было предкомпактным, необходимо, а в случае полного пространства и достаточно, чтобы это множество было вполне ограниченным.*

Таким образом, перечисленные выше свойства множеств можно связать следующей диаграммой:

секвенциальная компактность

$\Updownarrow$

компактность

$\Downarrow$

предкомпактность

$\Downarrow$ $\quad$ $\Updownarrow$ (в полном пространстве)

полная ограниченность

$\Downarrow$

ограниченность

Для проверки предкомпактности множества в конкретных пространствах удобно использовать специальные теоремы.

1. Предкомпактность в $C[a;b]$.

Дадим сначала необходимые определения.

Множество M из $C[a;b]$ называется **равномерно ограниченным**, если существует такая константа C, что для всех $x \in M$ выполняется неравенство $|x(t)| \leq C$ для всех $t \in [a;b]$.

Множество M из $C[a;b]$ называется **равностепенно непрерывным**, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, такое, что

$$|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon$$

для всех $t_1, t_2 \in [a; b]$ таких, что $|t_1 - t_2| < \delta$, и для всех $x \in M$.

Теорема Асколи-Арцела (критерий предкомпактности в $C[a;b]$). *Для того, чтобы множество M было предкомпактно в $C[a;b]$, необходимо и достаточно, чтобы M было равномерно ограничено и равностепенно непрерывно.*

2. Предкомпактность в l_p, $1 \le p < \infty$.

Теорема. *Для того, чтобы множество M было предкомпактно в l_p, необходимо и достаточно, чтобы*

1) M было ограничено,

2) для произвольного $\varepsilon > 0$ существовал номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такой, что для всех $x = (x_1, x_2, \ldots) \in M$ имело место неравенство

$$\sum_{i=n_0}^{\infty} |x_i|^p < \varepsilon.$$

3. Предкомпактность в $L_p[a;b]$, $1 \le p < \infty$.

Теорема (М. Рисса). *Для того, чтобы множество M было предкомпактно в $L_p[a;b]$, необходимо и достаточно, чтобы*

1) M было ограничено,

2) для произвольного $\varepsilon > 0$ существовало $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\int_0^{1-h} |x(t+h) - x(t)|\, dt < \varepsilon$$

при $|h| < \delta$ для любого $x \in M$.

4. Предкомпактность в c_0.

Теорема. *Для того, чтобы множество M было предкомпактно в c_0, необходимо и достаточно, чтобы*

1) M было ограничено;

2) для произвольного $\varepsilon > 0$ существовал номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такой, что для всех $x = (x_1, x_2, \ldots) \in M$ имело место неравенство

$$\sup_{k > n_0} |x_k| < \varepsilon.$$

5. Предкомпактность в c.

Теорема. *Для того, чтобы множество M было предкомпактно в c, необходимо и достаточно, чтобы*

1) M было ограничено;

2) для произвольного $\varepsilon > 0$ существовал номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такой, что для всех $x = (x_1, x_2, \ldots) \in M$ имело место неравенство

$$\sup_{k > n_0} \left| x_k - \lim_{k\to\infty} x_k \right| < \varepsilon.$$

Пример. *Является ли предкомпактным множество M всех функций $x \in C[0;1]$, представимых в виде*

$$x(t) = \int_0^1 t y(s)\, ds,$$

где $y \in C[0;1]$, $\|y\| \le 1$?

Решение. Покажем, что множество таких функций предкомпактно в $C[0;1]$. Для этого применим теорему Асколи-Арцела.

Пусть $x(t)$ – произвольная функция из M. Тогда для всех $t \in [0;1]$

$$|x(t)| = \left| \int_0^1 t y(s)\, ds \right| \le |t| \cdot \int_0^1 \max_{s\in[0;1]} |y(s)|\, ds \le 1 \cdot \|y\| \cdot \int_0^1 ds \le 1.$$

Таким образом множество M равномерно ограниченно.

Покажем, что M равностепенно непрерывно. Для любого $\varepsilon > 0$ положим $\delta = \varepsilon$. Тогда для любой функции $x \in M$ и для любых $t_1, t_2 \in [0;1]$ таких, что $|t_1 - t_2| < \delta$, получим

$$|x(t_1) - x(t_2)| = \left| (t_1 - t_2) \int_0^1 y(s)\, ds \right| \le |t_1 - t_2| \left| \int_0^1 y(s)\, ds \right| \le$$

$$\le |t_1 - t_2| \cdot \|y\| \le |t_1 - t_2| < \delta = \varepsilon.$$

Следовательно, множество M является предкомпактным в $C[0;1]$.

Задачи

1.1. Доказать, что в метрическом пространстве любое компактное множество является ограниченным и замкнутым.

1.2. Показать, что существуют замкнутые и ограниченные, но некомпактные множества в метрических пространствах. Рассмотреть примеры

а) пространство l_2 и $B[\theta; 1]$.

б) пространство $C[0;1]$ и множество функций $f(x)$ из этого пространства, для которых $|f(x)| \leq A$, где A — фиксированное положительное число.

в) пространство $\mathbb{Q}$ с метрикой $\rho(p, q) = |p - q|$ и множество $M = \{p \in \mathbb{Q} : 3 < p^2 < 5\}$.

1.3. Показать, что любое замкнутое подмножество компактного множества компактно.

1.4. Пусть A_1, $A_2, \ldots$ — компактные множества. Верно ли, что

а) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ — компактное множество;

б) $\bigcup\limits_{n=1}^{N} A_n$ — компактное множество;

в) $\bigcap\limits_{n=1}^{N} A_n$ — компактное множество?

1.5. Проверить, что любое компактное множество M в метрическом пространстве (X, ρ) является полным метрическом пространством (M, ρ).

1.6. Дано компактное в метрическом пространстве $\mathbb{R}$ множество

$$M = \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots\right\}.$$

Его покрывают интервалы

$$(-\varepsilon; \varepsilon); \ \left(\frac{1-\varepsilon}{2^n}; \frac{1+\varepsilon}{2^n}\right), n = 0, 1, \ldots,$$

где $\varepsilon \in (0; 1/2)$ — фиксированное число. Выделить из этой системы интервалов конечную систему, покрывающую множество M.

1.7. Дано множество

$$M = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots\right\}$$

в метрическом пространстве $\mathbb{R}$. Его покрывают интервалы

$$\left(\frac{1-\varepsilon}{2^n}; \frac{1+\varepsilon}{2^n}\right), \ n = 0, 1 \ldots,$$

где $\varepsilon \in (0; 1/3)$ — фиксированное число. Можно ли из этого покрытия выделить конечное подпокрытие множества M?

1.8. Дано замкнутое множество $M = \{1, 2, 3, \ldots\}$ в метрическом пространстве $\mathbb{R}$. Его покрывает бесконечная система интервалов $(1-\varepsilon; 1+\varepsilon)$, $(2-\varepsilon; 2+\varepsilon)$, $(3-\varepsilon; 3+\varepsilon)$, $\ldots$, где ε — произвольное положительное число. Можно ли из этого покрытия выделить конечное подпокрытие множества M?

1.9. Дано ограниченное множество $(0; 1)$ в $\mathbb{R}$. Оно покрыто интервалами вида

$$\left(\frac{1}{n+2}; \frac{1}{n}\right), \ n = 1, 2, \ldots$$

Можно ли из этого покрытия выделить конечное подпокрытие?

1.10. Показать, что утверждение: "из любого покрытия компактного множества замыканиями открытых множеств можно выделить конечное подпокрытие" неверно. Рассмотреть пример: отрезок $[0;1]$, покрытый системой отрезков

$$[-1;0],\ \left[\frac{1}{2};1\right],\ \left[\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right],\ \left[\frac{1}{4};\frac{1}{3}\right],\ldots$$

1.11. Показать, что любое компактное множество является предкомпактным, обратное неверно.

1.12. Показать, что любое предкомпактное множество является ограниченным, обратное неверно.

1.13. Показать, что каждое вполне ограниченное множество является ограниченным, обратное неверно.

1.14. Показать, что целочисленные точки образуют на плоскости $1/\sqrt{2}$ - сеть.

1.15. Доказать, что если для множества A имеется ε - сеть S, то можно построить 2ε - сеть R для A такую, что $R \subset A$.

1.16. Показать, что в n - мерном евклидовом пространстве полная ограниченность совпадает с ограниченностью.

1.17. Доказать утверждение: для того, чтобы множество в метрическом пространстве было компактным, необходимо, а в случае полного пространства и достаточно, чтобы это множество было вполне ограниченным и замкнутым.

1.18. Являются ли предкомпактными в $C[0;1]$ множества:

а) $\{x : x(t) = n,\ n = 1,2,\ldots\}$;

б) $\{x : x(t) = \ln(tn),\ n = 1,2,\ldots\}$;

в) $\{x : x(t) = t^n,\ n = 1,2,\ldots\}$;

г) $\{x : x(t) = \sin(t+n),\ n = 1,2,\ldots\}$;

д) $\{x : x(t) = \sin(at),\ a \in \mathbb{R}\}$;

е) $\{x : x(t) = \sin(at),\ a \in [0;1]\}$;

ж) $\{x : x(t) = e^{t-a},\ a \geq 0\}$;

з) $\left\{x : x(t) = \int\limits_0^t y(s)\,ds,\ y \in C[0;1], \|y\| \le 1\right\}$;

и) $\Big\{x : x(t) = \int\limits_0^1 K(t,s)y(s)\,ds,\ y \in C[0;1], \|y\| \le 1,$
$K(t,s)$ непрерывна в $[0;1]\times[0;1]\Big\}$;

к) $\Big\{x : x(t) = a + \int\limits_0^t y'(s)\,ds,\ y \in C[0;1], \|y\| \le 1,$
a — фиксированная константа$\Big\}$;

л) $\left\{x : x(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{t+n^2},\ |a_n| \le 1\right\}$;

м) равномерно ограниченное множество функций $x = x(t) \in C[0;1]$, для которых выполняется условие Липшица

$$|x(t_1) - x(t_2)| \le L|x_1 - x_2|$$

для всех $t_1, t_2 \in [0;1]$ с общей константой L;

н) равномерно ограниченное множество функций $x = x(t) \in C[0;1]$, для которых выполняется условие Гёльдера

$$|x(t_1) - x(t_2)| \le \Gamma|x_1 - x_2|^\alpha,$$

$\alpha > 0$ для всех $t_1, t_2 \in [0;1]$ с общей константой Γ?

1.19. Являются ли предкомпактными в l_p, $p \ge 1$ множества:

а) $\left\{(x_1, \dots, x_k, \dots) : |x_k| \le \dfrac{1}{k^2},\ k \in \mathbb{N}\right\}$;

б) $\left\{(x_1, \dots, x_k, \dots) : |x_k| \le \dfrac{1}{3^k},\ k \in \mathbb{N}\right\}$;

в) $\left\{\left(\dfrac{1}{1+a}, \dfrac{2}{1+a\cdot 2^3}, \dots, \dfrac{k}{1+a\cdot k^3}, \dots\right) : a \in [1;2],\ k \in \mathbb{N}\right\}$;

г) $\left\{(x_1, \ldots, x_k, \ldots) : x_1 < 1,\ x_k > 0,\ x_{k+1} < \dfrac{x_k}{3},\ k \in \mathbb{N}\right\}$;

д) $\left\{(x_1, \ldots, x_k, \ldots) : x_{2k} = 0,\ 0 < x_{2k+1} \leq \dfrac{1}{3^k},\ k \in \mathbb{N}\right\}$;

е) $\left\{\left(\dfrac{1}{3^a}, \dfrac{1}{3^{2a}}, \ldots, \dfrac{1}{3^{k\cdot a}}, \ldots\right) : \dfrac{1}{p} \leq a \leq 2,\ k \in \mathbb{N}\right\}$;

ж) $\left\{\left(\dfrac{a}{1^{2/p}}, \dfrac{a}{2^{2/p}}, \ldots, \dfrac{a}{k^{2/p}}, \ldots\right) : 1 \leq a \leq 2012,\ k \in \mathbb{N}\right\}$;

з) $\left\{\left(\dfrac{\sin a}{3^{1/p}}, \dfrac{\sin 2a}{3^{2/p}}, \ldots, \dfrac{\sin ka}{3^{k/p}}, \ldots\right) : a \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}\right\}$;

и) $\{(a, 0, 0, \ldots) : 1 \leq a \leq 2012\}$;

к) $\left\{(x_1, x_2, \ldots) : |x_k| \leq a_k,\ k \in \mathbb{N}, \sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|^p < \infty\right\}$.

1.20. Является ли предкомпактным в $L_p[0;1], 1 \leq p < \infty$, множество функций $x(t)$, представимых в виде

$$x(t) = \int\limits_0^1 K(t,s)x(s)\,ds,$$

где $K(t,s)$ — фиксированная непрерывная на квадрате $[0;1] \times [0;1]$ функция, $y \in L_p[0;1]$, $\|y\| \leq 1$.

1.21. Являются ли предкомпактными в c_0 множества:

а) $\{(a, 0, 0, \ldots) :\ a \in \mathbb{R}\}$;

б) $\{(a, 0, 0, \ldots) :\ a \in [-1;1]\}$?

1.22. Являются ли предкомпактными в c множества:

а) $\left\{\left(\dfrac{a}{2}, \dfrac{2a}{3} \ldots, \dfrac{na}{n+1}, \ldots\right) :\ a \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}\right\}$;

б) $\left\{\left(\dfrac{a}{2}, \dfrac{2a}{3} \ldots, \dfrac{na}{n+1}, \ldots\right) :\ a \in [-1;1],\ n \in \mathbb{N}\right\}$?

3.2. Компактные операторы

Пусть X, Y — линейные нормированные пространства, $A : X \to Y$.

Оператор A называется **компактным** , если он каждое ограниченное множество из X переводит во вполне ограниченное множество из Y. Если при этом A непрерывен, то он называется **вполне непрерывным**.

Так как свойства полной ограниченности и предкомпактности множества в банаховом пространстве эквивалентны, то в этом случае для проверки компактности оператора удобно использовать критерии предкомпактности множеств в конкретных банаховых пространствах (см. раздел 3.1.).

Задачи

2.1. Являются ли компактными следующие операторы $A : C[0;1] \to C[0;1]$:

а) $Ax(t) = \varphi(t)x(t_0)$, где $\varphi(t)$ — фиксированная функция из $C[0;1]$, t_0 — фиксированное число из $[0;1]$;

б) $Ax(t) = \int\limits_0^t sx(s)\,ds + t$;

в) $Ax(t) = x(0) + tx\left(\frac{1}{2}\right) + t^2x(1) + t^3x\left(\frac{1}{3}\right)$;

г) $Ax(t) = x(t^3)$;

д) $Ax(t) = \lambda\int\limits_0^1 K(t,s)x(s)\,ds + f(t)$, где $K(t,s)$ — фиксированная непрерывная на квадрате $[0;1]\times[0;1]$ функция, λ — фиксированная константа, $f(t)$ — фиксированная функция из $C[0;1]$?

2.2. Будут ли компактными следующие операторы $A : C[-1;1] \to C[-1;1]$:

а) $Ax(t) = 2x(t)$;

б) $Ax(t) = \dfrac{1}{3}\,(x(t) + x(-t) + x(0))$?

2.3. Будет ли компактным оператор $Ax(t) = \dfrac{dx}{dt}$, действующий

а) из $C^{(1)}[0;1]$ в $C[0;1]$;

б) из $C^{(2)}[0;1]$ в $C[0;1]$?

2.4. Будет ли компактным тождественный оператор $I : C^{(1)}[0;1] \to C[0;1]$?

2.5. Будет ли компактным оператор $A : L_p[0;1] \to L_p[0;1]$, $1 \le p < \infty$,

$$Ax(t) = \int\limits_0^t (1+s)x(s)\,ds?$$

2.6. Является ли компактным оператор $A : l_p \to l_1$, $1 < p < \infty$, действующий по формуле

$$A(x_1, x_2, \ldots) = \left(\frac{x_1}{1}, \frac{x_2}{2}, \ldots, \frac{x_k}{k}, \ldots\right)?$$

2.7. Будет ли компактным тождественный оператор $I : l_p \to l_q, 1 \le p, q \le \infty$?

2.8. Показать, что оператор $A : l_p \to l_p$, $1 \le p < \infty$, действующий по формуле

$$A(x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, 0, x_2, 0, x_3, \ldots)\,,$$

не является компактным, хотя A^2 компактен.

2.9. Является ли компактным оператор $A : l_p \to l_q$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, действующий по формуле

$$A(x_1, x_2, \ldots) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{1j} \cdot x_1, \sum_{j=1}^{\infty} a_{2j} \cdot x_2, \ldots\right),$$

где $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^q < \infty$?

2.10. Являются ли компактным операторами, действующие из l_p в l_p, $1 \leq p < \infty$:

а) правого сдвига $T_r(x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots)$;
б) левого сдвига $T_l(x_1, x_2, \ldots) = (x_2, x_3, x_4, \ldots)$;
в) $Ax = (\|x\|, 0, 0, \ldots)$?

2.11. Является ли компактным оператор $A : l_1 \to l_1$,

$$A(x_1, x_2, \ldots) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n, 0, 0, \ldots \right)?$$

2.12. Является ли компактным оператор $A : l_p \to l_p$, $1 < p < \infty$,

$$A(x_1, x_2, \ldots) = \left(x_1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \right)?$$

2.13. Является ли компактным оператор $A : c_0 \to c_0$,

$$A(x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, 0, x_2, 0, x_3, \ldots)?$$

2.14. Являются ли компактными операторы $A : c \to c$:

а) $A(x_1, x_2, \ldots) = \left(x_1, \lim\limits_{n\to\infty} x_n,\ x_2, \lim\limits_{n\to\infty} x_n,\ x_3, \ldots \right)$;

б) $A(x_1, x_2, \ldots) = \left(\frac{x_1}{2^1}, \frac{x_2}{2^2}, \ldots, \frac{x_k}{2^k}, \ldots \right)$;

в) $A(x_1, x_2, \ldots) = \left(\frac{x_1}{1!}, \frac{x_2}{2!}, \ldots, \frac{x_k}{k!}, \ldots \right)$;

г) $A(x_1, x_2, \ldots) = \left(\frac{x_1}{1^1}, \frac{x_2}{2^2}, \ldots, \frac{x_k}{k^k}, \ldots \right)$;

д) $A(x_1, x_2, \ldots) = (x_1 + x_2,\ x_2 + x_3, \ldots,\ x_k + x_{k+1}, \ldots)$;

е) $A(x_1, x_2, \ldots) = (x_1 - x_2,\ x_2 - x_3, \ldots,\ x_k - x_{k+1}, \ldots)$;

ж) $A(x_1, x_2, \ldots) = (x_1 x_2,\ x_2 x_3, \ldots,\ x_k x_{k+1}, \ldots)$;

з) $A(x_1, x_2, \ldots) = (y_1, y_2, \ldots)$, где для $k = 1, 2, \ldots$

$$y_k = \begin{cases} \dfrac{x_k}{x_{k+1}}, & \text{если } x_k \neq 0 \text{ и } \lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq 0, \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases}$$

и) левого сдвига $T_l(x_1, x_2, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots)$;

к) правого сдвига $T_r(x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots)$;

л) $A(x_1, x_2, \ldots) = \left(x_1, \dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \ldots\right)$?

2.15. Пусть $a = (a_1, a_2, \ldots)$, $b = (b_1, b_2, \ldots)$ – фиксированные последовательности из пространства c. При каких условиях на a и b оператор $A : c \to c$,

$$A(x_1, x_2, \ldots) = (b_1 x_1 + a_1 x_2, \ldots,\ b_k x_k + a_k x_{k+1}, \ldots)\,,$$

будет компактным?

2.16. Показать, что если $\varphi \in C[0; 1]$ и $\varphi(t) \not\equiv 0$ на $[0; 1]$, то оператор $A : C[0; 1] \to C[0; 1]$, $Ax(t) = \varphi(t)x(t)$ не является компактным.

Указание: рассмотреть точки $t_1 = \dfrac{1}{2}$, $t_2 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n}$ и функции

$$x_n(t) = \begin{cases} -\dfrac{1}{\varphi(t_0)}, & \text{если } \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n} \leq t \leq 1, \\ -2^{n-1}(2t - 1), & \text{если } \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n} < t < \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n}, \\ \dfrac{1}{\varphi(t_0)}, & \text{если } 0 \leq t \leq \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n}, \end{cases}$$

где число $t_0 \in [0; 1]$, такое, что $\varphi(t_0) \neq 0$.

2.17. Показать, что если $\varphi \in L_\infty[0; 1]$, такая, что $\varphi(t) \neq 0$ почти всюду на $[0; 1]$, то оператор $A : L_p[0; 1] \to L_p[0; 1]$, $1 \leq p < \infty$, $Ax(t) = \varphi(t)x(t)$ не является компактным.

Указание: рассмотреть функции

$$x_n(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varphi(t)}, & \text{если } t \in [0;1/n],\ \varphi(t) \neq 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

2.18. Является ли компактным в оператор суперпозиции $A : C[0;1] \to C[0;1]$, $Ax(t) = x(\varphi(t))$, где $\varphi(t)$ — фиксированное непрерывное взаимно-однозначное отображение отрезка $[0;1]$ на себя?

2.19. Пусть $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ – некоторая фиксированная последовательность. Показать, что оператор $A : l_p \to l_p$, $1 \leq p < \infty$, действующий по формуле

$$A(x_1, x_2, \ldots) = (a_1 x_1, a_2 x_2, \ldots)\,,$$

компактен тогда и только тогда, кода $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

2.20. Пусть $a = (a_1, a_2, \ldots)$ — фиксированная ограниченная последовательность. Показать, что следующий оператор $A : c_0 \to c_0$,

$$A(x_1, x_2, \ldots) = (a_1 x_1, a_2 x_2, \ldots)\,,$$

компактен тогда и только тогда, кода $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

2.21. Пусть $a = (a_1, a_2, \ldots)$ — фиксированный элемент из c. Показать, что оператор $A : c \to c$,

$$A(x_1, x_2, \ldots) = (a_1 x_1, a_2 x_2, \ldots)\,,$$

компактен тогда и только тогда, кода $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Ответы

Глава 1

1.4. Нет.
1.7. Да.
1.8. **а)** нет, **б)** да.
1.9. Да.
1.13. Функция f должна быть строго монотонной.
1.14. Нет.
1.15. **2)** нет, **3)** нет.
1.16. Нет.
2.5. **а)** да, **б)** нет, **в)** да, **г)** нет, **д)** да, **е)** нет, **ж)** да, **з)** нет, **и)** нет, **к)** нет, **л)** нет.
2.6. **а)** да, **б)** нет, **в)** да, **г)** нет, **д)** нет, **е)** да, **ж)** да, **з)** да.
2.7. Нет.
2.8. **а)** да, **б)** да.
2.9. Нет.
2.10. Если $\alpha \neq 0$ и $\alpha > -\frac{1}{p}$, то $\|x(t)\| = (\alpha p + 1)^{-1/p}$. При $\alpha = 0$ $\|x(t)\| = 1$. В остальных случаях $x(t) \notin L_p[0;1]$.
3.1. Если $C = (x, y)$ — центр шара и $r \geqslant 0$, то:
а) $B[C, r]$ ($B(C, r)$) — замкнутый (открытый) круг на плоскости с центром в точке C радиусом r;
б) $B[C, r]$ ($B(C, r)$) — замкнутый (открытый) квадрат на плоскости с вершинами в точках $(x - r, y)$, $(x + r, y)$, $(x, y - r)$ и $(x, y + r)$;
в) $B[C, r]$ ($B(C, r)$) — замкнутый (открытый) квадрат на плоскости с вершинами в точках $(x-r, y-r)$, $(x+r, y-r)$, $(x-r, y+r)$ и $(x + r, y + r)$.
3.2. Если $x(t) \in C[a; b]$ и $r \geqslant 0$, то $B(x, r)$ — множество непрерывных на отрезке $[a; b]$ функций, графики которых лежат в множестве $M = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : t \in [a; b],\ \ x(t) - r < y < x(t) + r\}$;
$B[x, r]$ — множество непрерывных на отрезке $[a; b]$ функций, графики которых лежат в следующем множестве:

$M = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : t \in [a; b], \quad x(t) - r \leqslant y \leqslant x(t) + r\}$.

3.3. Если $0 \leqslant r < 1$, то $B[x, r] = x$; если $r \geqslant 1$, то $B[x, r] = X_d$; если $0 \leqslant r \leqslant 1$, то $B(x, r) = x$; если $r > 1$, то $B(x, r) = X_d$.

3.4. Каждое множество является открытым; каждое множество является замкнутым.

3.5. Да.

3.7. Нет.

3.14. Не всегда.

3.15. Да.

3.16. Да.

3.17. Да.

3.18. Нет.

3.19. Да.

3.23. **а)** нет, **б)** да, **в)** да, **г)** да, **д)** да, **е)** да, **ж)** да, **з)** нет, **и)** да, **к)** да, **л)** нет, **м)** да, **н)** нет, **о)** да.

4.1. **а)** равномерная сходимость на $[a; b]$;

б) равномерная сходимость на $[a; b]$ производных порядка $k = 1, \ldots, n$;

в) покоординатная сходимость, равномерная относительно номера координаты;

г) покоординатная сходимость.

4.5. **а)**, **б)** сходится к $x(t) \equiv 0$.

4.6. Во всех указанных пространствах сходится к $(0, 0, \ldots)$.

4.7. Не сходится.

4.8. **а)** в l_p, l_∞ не сходится, в s сходится к $(1, 2, 3, \ldots)$;

б) в l_p, l_∞ не сходится, в s сходится к $(1, 1, \ldots)$;

в) в l_1 не сходится, в l_p $(p > 1)$, l_∞, s сходится к $(0, 0, \ldots)$;

г) при $\alpha = 1$ см. в); при $\alpha < 0$ расходится в каждом пространстве; при $\alpha > 0$ сходится к $(0, 0, \ldots)$ в l_p при $p > \frac{1}{\alpha}$, в l_∞ и в s.

4.9. Не сходится.

4.10. **а)** в l_p $p > 1$ и c_0 сходится к $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right)$; в l_1 не сходится;

б) в c_0 сходится к $\left(\frac{1}{\ln 2}, \frac{1}{\ln 3}, \ldots\right)$; в l_p расходится.

4.11. **а)** не сходится;

б) не сходится;

в) сходится к $x(t) = \frac{\sqrt[5]{t}}{2}$.

5.8. Нет, пополнение изоморфно $C[0; 1]$.

5.9. Начиная с некоторого номера N элементы последовательности совпадают.

5.10. Да.
5.11. Начиная с некоторого номера N элементы последовательности совпадают.
5.12. Да.
5.14. Пространство является полным.
5.15. f должна быть биекцией между $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}$.
5.19. **а)** не является полным, пополнение изоморфно $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;
б) не является полным, пополнение изоморфно $[0; +\infty)$;
в) полное.
6.1. **а)** $x(t) = t$;
б) $x(t) = 1 + \frac{4}{21}t$;
в) $x(t) = 1 + (e^{t-1} - e^t)/2$;
г) $x(t) = e^{\lambda t}$;
д) $x(t) = 1 + \frac{e^t}{6-e}$;
е) $x(t) = cos\pi t$.
6.4. $1 + \sqrt{2}$.
7.2. В l_2 и $L_2[a; b]$.
7.15. $e_1(t) = 1$, $e_2(t) = t - 1$, $e_3(t) = \frac{1}{26}(t^2 - 6t - 2)$.
7.16. $\varphi = \arccos \frac{\sqrt{6}}{\pi}$.
7.17. $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$, $\varphi_2 = \frac{\pi}{3}$, $\varphi_3 = \frac{\pi}{6}$.
7.18. **а)** $e_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $e_2(t) = \sqrt{\frac{3}{2}}\,t$, $e_3(t) = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\left(t^2 - \frac{1}{3}\right)$;
б) $e_1(t) = 1$, $e_2(t) = 2\sqrt{3}(t - \frac{1}{2})$, $e_3(t) = 3\sqrt{10}\left(t^2 - t + \frac{1}{6}\right)$.
8.4. $\{x^*(t) \in C[0; 1] : \; x^*(0) = 0, \; 0 \leqslant x^*(t) \leqslant 2, \; t \in [0; 2]\}$.
8.5. $\frac{1}{2}$.
8.6. $\frac{1}{n+1}$.
8.7. $\frac{1}{\sqrt{n}}$.
8.8. $\rho(x, P_1) = \frac{\sqrt{96}}{3\sqrt{10}}$, $x^*(t) = t - \frac{1}{6}$.

Глава 2

1.1. 0.
1.2. 1.
1.3. $\|\alpha\|$.
1.4. 1.
1.5. $b - a$.
1.6 $e^{b-a} - 1$.
1.7. $\frac{1}{m+1}$.

1.8. $\frac{2}{\pi}$.
1.9. 1.
1.10. $\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}}$.
1.11. 1.
1.12. Да, $\|A\| = 1$.
1.13. Нет.
1.14. Да, $\|A\| = \max\{|a|, |b|\}$.
1.15. Нет.
1.16. **а)** является, $\|F\| = 1 - \cos 1$;
б) не является;
в) является, $\|F\| = 1$;
г)–к) не является.
1.17. $(b-a)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}$.
1.18. Да, $\|f\| = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}}$.
1.19. Да, $\|f\| = 1$.
1.20. Да, $\|f\| = 6030$.
1.21. **а)** да; **б)** вообще говоря, нет.
1.26. **а)** нет; **б)** да, да.
1.28. Да.
2.1. $A_n \rightrightarrows \Theta$, где $\Theta x \equiv \theta$.
2.2. **а)** не сходится ни равномерно, ни поточечно;
б) $A_n \to \Theta$;
в) $A_n \to \Theta$;
г) $A_n \to \Theta$;
д) $A_n \rightrightarrows A$, где $Ax = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \ldots)$;
е) $A_n \to A$, где $Ax = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \ldots)$;
ж) $A_n \to \Theta$;
з) $A_n \to A$, где $Ax = A(x_1, x_2, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots)$;
и) $A_n \to I$, где I — тождественный оператор;
к) $A_n \to I$.
2.3. $A_n \to \Theta$.
2.4. $A_n \to A$, где $A(x_1, x_2, \ldots) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n, \lim\limits_{n\to\infty} x_n, \ldots\right)$.
2.5. **а)** $A_n \rightrightarrows \Theta$;
б) не сходится ни равномерно, ни поточечно;
в) $A_n \rightrightarrows \Theta$;

г) $A_n \rightrightarrows A$, где $Ax = Ax(t) = \int\limits_0^t e^s x(s)\,ds$;

д) $A_n \rightrightarrows A$, где $Ax = Ax(t) = \int\limits_0^1 K(t,s)x(s)\,ds$;

е) $A_n \rightrightarrows A$, где $Ax = Ax(t) = \int\limits_0^1 K(t,s)x(s)\,ds$;

ж) $A_n \rightrightarrows A$, где $Ax = Ax(t) = a(t)x(t)$.

4.2. **а)** $y(t) = \frac{1}{2}(t+1)$, $\|f\| = 2^{1/q}(q+1)^{-1/q}$;

б) $y(t) = \begin{cases} a^{-1/q}, & \text{если } t \in [-a; a], \\ 0, & \text{если } t \in [-1; -a) \cup (a; 1]; \end{cases}$

$\|f\| = 2^{1/q}$;

в) $y(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in [-1; 0], \\ -1, & \text{если } t \in (0; 1]; \end{cases}$

$\|f\| = 2^{1/q}$;

г) $y(t) = \begin{cases} t^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}, & \text{если } t \in [0; 1], \\ 0, & \text{если } t \in [-1; 0); \end{cases}$

$\|f\| = \left(\frac{\alpha}{\alpha+q(1-\alpha)}\right)^{1/q}$.

4.3. **а)** $y = (0,0,0,0,1,0,\ldots)$, $\|f\| = 1$;

б) $y = (0,0,2^{-1/q},0,0,0,-2^{-1/q},0,\ldots)$, $\|f\| = 1$;

в) $y = \left(1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \ldots\right)$, $\|f\| = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^q}\right)^{1/q}$;

г) $y = \left(2^{-1/q}, 2^{-2/q}, \ldots\right)$, $\|f\| = 1$.

4.4. **а)** $y = (\underbrace{0,0,\ldots,0}_{7},1,0,\ldots)$, $\|f\| = 1$;

б) $y = (0,-6,0,8,0,\ldots)$, $\|f\| = 8$;

в) $y = (1,1,\ldots)$, $\|f\| = 1$;

г) $y = \left(1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \ldots\right)$, $\|f\| = 1$;

д) $y = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, \ldots\right)$, $\|f\| = 1/2$.

4.5. **а)** $y = (1,0,\ldots)$, если $X = c_0$; $y = (0,1,0,\ldots)$, если $X = c$; $\|f\| = 1$;

б) $y = (-2009, 2010, 2011, 0, \ldots)$, если $X = c_0$; в случае $X = c$ имеем $y = (0, -2009, 2010, 2011, 0, \ldots)$; $\|f\| = 6030$;

в) $y = (1,0,\ldots)$ и $\|f\| = 1$, если $X = c_0$, и $y = (-1,1,0,\ldots)$, $\|f\| = 2$, если $X = c$.

4.6. **а)** $y(t) = t^2$, $\|f\| = 1$;
б) $y(t) = \sqrt{t}$, $\|f\| = 1$;
в) $y(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } z = 0, \\ 1, & \text{если } z \in (0; 1]; \end{cases}$
$\|f\| = 1$;
г) $y(t)$ равен сумме $\int\limits_0^t a(s)\,ds$ и ступенчатой функции со скачками a_k в точках t_k; $\|f\| = \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k| + \int\limits_0^1 |a(t)|\,dt$.

4.7. **а)** $y(t) = t + 1$, $\|f\| = 2$;
б) $y(t) = \begin{cases} t + 1, & \text{если } t \in [-1; 0), \\ -t + 1, & \text{если } t \in [0; 1]; \end{cases}$
$\|f\| = 2$;
в) $y(t) = \int\limits_{-1}^{t} a(s)\,ds$, $\|f\| = \int\limits_{-1}^{1} |a(s)|\,ds$;
г) $y(t)$ — ступенчатая функция, т. ч. $y(-1) = 0$, имеющая скачки a_k в точках t_k, $\|f\| = \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|$;
д) $y(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \in [-1; -a], \\ a^{-1}t + 1, & \text{если } t \in (-a; a), \\ 2, & \text{если } t \in [a; 1], \end{cases}$
$\|f\| = 2$.

5.1. Совпадает в $\mathbb{R}^n$ и l_1.

5.2. **а)** в l_p, c_0 слабо сходится к $x = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right)$, в l_1 не сходится слабо;
б) в l_p, c_0 слабо сходится к θ, в l_1 не сходится слабо;
в) не сходится ни в одном из указанных пространств;
г) в l_p, c_0 слабо сходится к θ, в l_1 не сходится слабо.

5.3. **а)** слабо сходится к θ;
б) не сходится слабо.

5.4. Слабо сходится к θ.

5.7. Слабо сходится к нулевому оператору.

6.3. $\mathcal{A}^T$.

6.4. Оператор A^* функционалу $g \in X^*$, порожденному элементом $y = (y_1, y_2, \ldots)$, ставит в соответствие функционал $f \in X^*$, порожденный элементом:
а) $\tilde{y} = (0, y_1, y_2, \ldots)$;

б) $\tilde{y} = (y_2, y_3, \ldots)$;
в) $\tilde{y} = (\lambda_1 y_1, \lambda_2 y_2, \ldots)$;
г) $\tilde{y} = (0, y_1, \frac{y_2}{2}, \frac{y_3}{3}, \ldots)$.

6.5. Оператор A^* функционалу $g \in X^*$, порожденному элементом y, ставит в соответствие функционал $f \in X^*$, порожденный элементом $\tilde{y}$, где:

а) $X = C[0,1]$, $y = y(t)$, $\tilde{y}(t) = \int\limits_0^t \alpha(s)\, dy(s)$;

б) $X = L_p[0,1]$, $y = y(t)$, $\tilde{y}(t) = \alpha(t)y(t)$;

в) $X = L_p[0,1]$, $y = y(t)$, $\tilde{y}(t) = \int\limits_t^1 y(s)\, d(s)$;

г) $X = L_p[0,1]$, $y = y(t)$, $\tilde{y}(t) = \begin{cases} y(t-a), & \text{если } t \in [a,1], \\ y(t-a+1), & \text{если } t \in [0,a); \end{cases}$

д) $X = l_p$, $y = (y_1, y_2, \ldots)$, $\tilde{y} = (\alpha_1 y_3, \alpha_2 y_4, \ldots)$;

е) $X = l_p$, $y = (y_1, y_2, \ldots)$, $\tilde{y} = (\underbrace{y_1, y_2, \ldots, y_n}_{n}, 0, 0, \ldots)$;

ж) $X = l_p$, $y = (y_1, y_2, \ldots)$, $\tilde{y} = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n-1}, \alpha_n y_1, \alpha_{n+1} y_2, \ldots)$;

з) $X = L_p[-1,1]$, $y = y(t)$, $\tilde{y} = \dfrac{1}{2}(y(t) + y(-t))$;

и) $X = L_2[0,1]$, $y = y(t)$, $\tilde{y} = y\left(z^{1/\alpha}\right) \frac{1}{\alpha} z^{\frac{1}{\alpha} - 1}$.

7.3. $A^{-1}(y_1, y_2, \ldots) = (y_1/a_1, y_2/a_2, \ldots)$.

7.4. **а)** $A_l^{-1}(y_1, y_2, \ldots) = (y_2, y_4, \ldots)$;
б) $B_r^{-1}(y_1, y_2, \ldots) = (y_1, y_2, a_1, y_3, a_2, a_3, a_4, y_4, \ldots)$, где a_k — произвольные константы.

7.5. Функция $a(t)$ не должна обращается в нуль на отрезке $[0,1]$; обратным является оператор $A^{-1}y(t) = x(t)/a(t)$.

7.6. $A^{-1}y(t) = y'(t)$ не является ограниченным оператором (см. гл. 2, зад. 1.13).

7.7. Обратный не существует, $A_r^{-1}y(t) = \int\limits_0^t y(s)\, ds$.

7.8. **а)** да, $A^{-1}(y_1, y_2, \ldots) = (y_2, y_3, y_1, y_4, y_5, \ldots)$;
б) да, $A^{-1}(y_1, y_2, \ldots) = (\frac{y_1 + 2y_2}{3}, \frac{y_1 - y_2}{3}, , y_3, y_4, \ldots)$;
в) нет;
г) да, $A^{-1}(y_1, y_2, \ldots) = (y_1 - y_2, y_2, y_3, \ldots)$.

7.9. $(AB)^{-1}y(t) = y(\sqrt{t})/(\sqrt{t} + 1)$, $(BA)^{-1}y(t) = y(\sqrt{t})/(t+1)$.

7.10. **а)** да;
б) нет;

в) может как иметь ограниченный обратный, так и не иметь его.

8.1. $\rho(A)=\mathbb{C}\backslash\{0\}$, $R_\lambda(y_1,y_2,\ldots)=\left(-\frac{y_1}{\lambda},-\frac{y_2}{\lambda}-\frac{y_1}{\lambda^2},-\frac{y_3}{\lambda},-\frac{y_4}{\lambda}-\frac{y_4}{\lambda^2},\ldots\right)$, $\sigma_p(A)=\{0\}$, соответствующие собственному значению $\lambda=0$ собственные векторы имеют вид $x=(0,x_2,0,x_4,\ldots)$.

8.2. $\rho(A)=\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $\sigma_p(A)=\{0\}$, собственному значению $\lambda=0$ соответствуют собственные векторы $x=(0,0,x_3,0,0,x_6,\ldots)$, $R_\lambda(y_1,y_2,\ldots)=\left(-\frac{y_1}{\lambda},-\frac{y_2}{\lambda}-\frac{y_1}{\lambda^2},-\frac{y_3}{\lambda}-\frac{y_2}{\lambda^2}-\frac{y_1}{\lambda^3},\ldots\right)$.

8.3. $\rho(A)=\mathbb{C}\backslash\{1,-1\}$, $\sigma_p(A)=\{1,-1\}$, собственному значению $\lambda=1$ соответствуют собственные векторы $x=(x_1,x_1,x_2,x_2,\ldots)$; соответствующие собственному значению $\lambda=-1$ собственные векторы имеют вид $x=(x_1,-x_1,x_2,-x_2,\ldots)$;
$R_\lambda(y_1,y_2,\ldots)=\left(\frac{\lambda y_1+y_2}{1-\lambda^2},\frac{y_1+\lambda y_2}{1-\lambda^2},\frac{\lambda y_3+y_4}{1-\lambda^2},\frac{y_3+\lambda y_4}{1-\lambda^2},\ldots\right)$.

8.4. $\rho(A)=\mathbb{C}\backslash\{1,-1\}$, $\sigma_p(A)=\{1,-1\}$, собственному значению $\lambda=1$ соответствуют собственные векторы $x=(x_1,x_2,x_1,x_3,x_4,x_3,\ldots)$; соответствующие собственному значению $\lambda=-1$ собственные векторы имеют вид $x=(x_1,0,-x_1,x_4,0,-x_4,\ldots)$;
$R_\lambda(y_1,y_2,\ldots)=\left(\frac{\lambda y_1+y_3}{1-\lambda^2},\frac{y_2}{1-\lambda},\frac{y_1+\lambda y_3}{1-\lambda^2},\frac{\lambda y_4+y_6}{1-\lambda^2},\frac{y_5}{1-\lambda},\frac{y_4+\lambda y_6}{1-\lambda^2},\ldots\right)$.

8.5. $\rho(A)=\mathbb{C}\backslash\{0,1\}$, $R_\lambda(y_1,y_2,\ldots)=\left(\frac{y_1}{1-\lambda},\ldots,\frac{y_n}{1-\lambda},-\frac{y_{n+1}}{\lambda},-\frac{y_{n+1}}{\lambda},\ldots\right)$, $\sigma_p(A)=\{0,1\}$, $\lambda=0$ соответствуют собственные векторы вида $x=(\underbrace{0,\ldots,0}_{n},x_{n+1},x_{n+2},\ldots)$, $\lambda=1$ соответствуют собственные векторы вида $x=(x_1,\ldots,x_n,0,0,\ldots)$.

8.6. $\rho(A)=\mathbb{C}\setminus\{1\}$, $R_\lambda(y_1,y_2,\ldots)=\left(\frac{y_1}{1-\lambda}-\frac{y_2}{(1-\lambda)^2},\frac{y_2}{1-\lambda},\frac{y_3}{1-\lambda},\ldots\right)$, $\sigma_p(A)=\{1\}$, собственному значению $\lambda=1$ соответствуют собственные векторы вида $x=(x_1,0,x_2,x_3,\ldots)$.

8.7. $\rho(A)=\mathbb{C}\backslash\{\pm1\}$, $R_\lambda(y_1,y_2,\ldots)=\left(-\frac{y_1}{1+\lambda},-\frac{y_2}{1-\lambda},-\frac{y_3}{1+\lambda},-\frac{y_4}{1-\lambda},\ldots\right)$, $\sigma_p(A)=\{\pm1\}$, $\lambda=1$ соответствуют собственные векторы вида $x=(0,x_2,0,x_4,\ldots)$, $\lambda=-1$ соответствуют собственные векторы вида $x=(x_1,0,x_2,0,\ldots)$.

8.8. $\rho(A)=\mathbb{C}\setminus[a+1,b+1]$, $R_\lambda y(t)=\frac{y(t)}{t+1-\lambda}$, $\sigma_p(A)=\emptyset$.

8.9. $\rho(A)=\mathbb{C}\setminus[m,M]$, где $m=\min\limits_{t\in[a;b]}|\alpha(t)|$, $M=\max\limits_{t\in[a;b]}|\alpha(t)|$; $\sigma_p(A)=\emptyset$, $R_\lambda y(t)=\frac{y(t)}{\alpha(t)-\lambda}$.

8.10. Пусть $\mathbb{T}=\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}$, тогда $\rho(A)=\mathbb{C}\setminus\mathbb{T}$, $R_\lambda y(t)=\frac{y(t)}{e^{it}-\lambda}$, $\sigma_p(A)=\emptyset$.

8.11. $\rho(A) = \mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$, $R_\lambda y(t) = \frac{-\lambda y(t)+y(-t)}{\lambda^2-1}$, $\sigma_p(A) = \{\pm 1\}$, собственным вектором, соответствующим $\lambda = 1$, является любая нечетная функция из $C[-2;2]$, собственным вектором, соответствующим $\lambda = -1$, является любая четная функция из $C[-2;2]$.

8.12. $\rho(A) = \mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$, $R_\lambda y(t) = \frac{\lambda y(t)+y(-t)}{1-\lambda^2}$, $\sigma_p(A) = \{\pm 1\}$, собственным вектором, соответствующим $\lambda = 1$, является любая четная функция из $C[-2;2]$, собственным вектором, соответствующим $\lambda = -1$, является любая нечетная функция из $C[-2;2]$.

8.13. $\rho(A) = \mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$, $R_\lambda y(t) = \frac{\lambda y(t)+y(1-t)}{1-\lambda^2}$, $\sigma_p(A) = \{\pm 1\}$, собственным вектором, соответствующим $\lambda = 1$, является любая функция из $C[0;1]$, для которой $x(1-t) = x(t)$; собственным вектором, соответствующим $\lambda = -1$, является любая функция из $C[0;1]$, для которой $x(1-t) = -x(t)$.

8.14. $\rho(A) = \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$, $R_\lambda y(t) = -\frac{1}{\lambda} y(t) + \frac{y(0)}{\lambda(1-\lambda)} + \frac{y(1)t}{\lambda(1-\lambda)} - \frac{y(0)t}{\lambda(1-\lambda)^2}$, $\sigma_p(A) = \{0,1\}$; собственным вектором, соответствующим $\lambda = 0$, является любая функция из $C[0;1]$, для которой $x(0) = x(1) = 0$; собственным вектором, соответствующим $\lambda = 1$, является любая функция из $C[0;1]$ вида $x(t) = at$, a — константа.

Глава 3

1.1. **а)** нет, **б)** да, **в)** да.

1.7. Нет.

1.8. Нет.

1.9. Нет.

1.10. Нет.

1.18. **а)** нет, **б)** нет, **в)** нет, **г)** да, **д)** нет, **е)** да, **ж)** да, **з)** да, **и)** да, **к)** да, **л)** да, **м)** да, **н)** да.

1.19. **а) - к)** да.

1.20. Да.

1.21. **а)** нет, **б)** да.

1.22. **а)** нет, **б)** да.

2.1. **а)** да, **б)** да, **в)** да, **г)** нет, **д)** да.

2.2. **а)** нет, **б)** нет.

2.3. **а)** нет, **б)** да.

2.4. Да.
2.5. Да.
2.6. Да.
2.7. Нет.
2.9. Да.
2.10. **а)** нет, **б)** нет, **в)** да.
2.11. Да.
2.12. Да.
2.13. Нет.
2.14. **а)** нет, **б)** да, **в)** да, **г)** да, **д)** нет, **е)** нет, **ж)** нет, **з)** нет, **и)** нет, **к)** нет, **л)** нет.
2.15. $a = b = \theta$.
2.18. Нет.

Предметный указатель

Литература

1. Антоневич А. Б. Задачи и упражнения по функциональному анализу / А. Б. Антоневич, П. Н. Князев, Я. В. Радыно. — М. : КомКнига, 2006.
2. Бородин П. А. Задачи по функциональному анализу : в 2 ч. / П. А. Бородин, А. М. Савчук, И. А. Шейпак. — М. : Изд-во ЦПИ, 2009.
3. Городецкий В. В. Методы решения задач по функциональному анализу / В. В. Городецкий, Н. И. Нагнибида, П. П. Настасиев. — М. : Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010.
4. Канторович Л. В. Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. — М. : Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1984.
5. Кириллов А. А. Теоремы и задачи функционального анализа / А. А. Кириллов, А. Д. Гвишиани. — М. : Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1979.
6. Колмогоров А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. — М. : Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1976.
7. Очан Ю. С. Сборник задач по математическому анализу: Общая теория множеств и функций / Ю. С. Очан. — М. : Просвещение, 1981.

8. Пугачев В. С. Лекции по функциональному анализу / В. С. Пугачев. — М. : Изд-во МАИ, 1996.
9. Треногин В. А. Задачи и упражнения по функциональному анализу / В. А. Треногин, Б. М. Писаревский, Т. С. Соболева. — М. : Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1984.
10. Треногин В. А. Функциональный анализ / В. А. Треногин. — М. : Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1980.

Приложения

Приложение 1. Основные метрические пространства

Пространство	Описание	Метрика
X_d	Пространство с дискретной метрикой — произвольное множество X с метрикой $d(x,y)$	Для $x, y \in X$ $d(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = y, \\ 1, & \text{если } x \neq y \end{cases}$
s	Пространство всех числовых последовательностей $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, $x_k \in \mathbb{R}$ (или $x_k \in \mathbb{C}$)	Для $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, $y = \{y_k\}_{k=1}^{\infty} \in s$ $\rho(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\lvert x_k - y_k \rvert}{1 + \lvert x_k - y_k \rvert}$
B_0	Пространство числовых последовательностей $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, $x_k \in \mathbb{N}$	Для $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, $y = \{y_k\}_{k=1}^{\infty} \in B_0$ $\rho(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = y, \\ \frac{1}{k}, & \text{если } x \neq y, \end{cases}$ где k — номер первой координаты, для которой $x_k \neq y_k$
$\mathbb{N}$	Пространство натуральных чисел	Для $x, y \in \mathbb{N}$ $\rho(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = y, \\ 1 + \frac{1}{x+y}, & \text{если } x \neq y \end{cases}$
Любое метрическое пространство может быть получено из нормированного введением метрики $\rho(x,y) = \lVert x - y \rVert$		

Приложение 2. Основные нормированные пространства

Пространство	Описание	Норма
$\mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$	n-мерное пространство векторов $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{R}$ (или $x_i \in \mathbb{C}$), $i = 1, \ldots, n$	$\\|x\\| = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \|x_i\|^2\right)^{1/2}$
l_p	Пространство последовательностей $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, т. ч. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^p < \infty$, где $1 \leq p < \infty$	$\\|x\\| = \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^p\right)^{1/p}$
l_∞	Пространство ограниченных числовых последовательностей $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, т. е. таких, что $\sup\limits_i \|x_i\| < \infty$	$\\|x\\| = \sup\limits_i \|x_i\|$
c	Пространство сходящихся последовательностей $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$	$\\|x\\| = \sup\limits_i \|x_i\|$
c_0	Пространство последовательностей $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, сходящихся к нулю, т. е. таких, что $\lim\limits_{i \to \infty} x_i = 0$	$\\|x\\| = \max\limits_i \|x_i\|$
c^n	Пространство векторов $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_i \in \mathbb{R}$ (или $x_i \in \mathbb{C}$), $i = 1, \ldots, n$	$\\|x\\| = \max\limits_i \|x_i\|$
$C[a;b]$	Пространство непрерывных на отрезке $[a;b]$ функций $x = x(t)$	$\\|x\\| = \max\limits_{t \in [a;b]} \|x(t)\|$;
$C_p[a;b]$	Пространство непрерывных на отрезке $[a;b]$ функций $x = x(t)$ с нормой $\\|\cdot\\|_p$, где $1 \leq p < \infty$	$\\|x\\| = \left(\int\limits_a^b \|x(t)\|^p dt\right)^{1/p}$

Пространство	**Описание**	**Норма**
$C[a;+\infty)$	Пространство функций $x = x(t)$, непрерывных на промежутке $[a;+\infty)$, для которых $\sup\limits_{t\in[a;+\infty)} \lvert x(t)\rvert < +\infty$	$\lVert x\rVert = \sup\limits_{t\in[a;+\infty)} \lvert x(t)\rvert$
$C^{(n)}[a;b]$	Пространство n раз непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a;b]$ функций $x = x(t)$	$\lVert x\rVert = \sum\limits_{k=0}^{n} \max\limits_{t\in[a;b]} \lvert x^{(k)}(t)\rvert$
$L_p[a;b]$	Пространство классов эквивалентных функций $x = x(t)$, суммируемых по Лебегу со степенью p на $[a;b]$, где $1 \le p < \infty$, т. е. таких, что $\int\limits_a^b \lvert x(t)\rvert^p dt < \infty$	$\lVert x\rVert = \left(\int\limits_a^b \lvert x(t)\rvert^p dt\right)^{1/p}$
$L_\infty[a;b]$	Пространство классов эквивалентных измеримых функций $x = x(t)$, существенно ограниченных на $[a;b]$	$\lVert x\rVert = \operatorname{ess\,sup}\limits_{t\in[a;b]} \lvert x(t)\rvert$
$V[a;b]$	Пространство функций $x = x(t)$ с ограниченной на $[a;b]$ вариацией	$\lVert x\rVert = \lvert x(a)\rvert + \mathop{\mathbf{V}}\limits_a^b x(t)$, где $\mathop{\mathbf{V}}\limits_a^b x(t)$ — полная вариация функции $x(t)$ на отрезке $[a;b]$
$H(\triangle)$	Пространство функций $x = x(z)$, аналитических в единичном круге $\triangle$ и непрерывных в $\overline{\triangle}$	$\lVert x\rVert = \max\limits_{\lvert z\rvert=1} \lvert x(z)\rvert$

Приложение 3. Основные гильбертовы пространства

Пространство	**Описание**	**Скалярное произведение**
$\mathbb{R}^n$	n-мерное пространство векторов $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, где $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$	Для $x = \{x_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{R}^n$, $y = \{y_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{R}^n$: $(x, y) = \sum\limits_{i=1}^n x_i y_i$
$\mathbb{C}^n$	n-мерное пространство векторов $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, где $x_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, n$	Для $x = \{x_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{C}^n$, $y = \{y_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{C}^n$: $(x, y) = \sum\limits_{i=1}^n x_i \overline{y}_i$
l_2	Пространство последовательностей $x = \{x_k\}_{k=1}^\infty$, удовлетворяющих условию $\sum\limits_{k=1}^\infty \lvert x_k\rvert^2 < \infty$	Для $x = \{x_k\}_{k=1}^\infty \in l_2$, $y = \{y_k\}_{k=1}^\infty \in l_2$: $(x, y) = \sum\limits_{i=1}^\infty x_i \overline{y}_i$
$L_2[a; b]$	Пространство классов эквивалентных функций $x = x(t)$, суммируемых по Лебегу в квадрате на $[a; b]$, т. е. таких, что $\int\limits_a^b \lvert x(t)\rvert^2 dt < \infty$	Для $x = x(t) \in L_2[a; b]$, $y = y(t) \in L_2[a; b]$: $(x, y) = \int\limits_a^b x(t)\overline{y(t)} dt$