Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего профессионального образования
ПЕТРОЗАВОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Е. Г. Ганенкова, К. Ф. Амозова

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ: КОМПАКТНЫЕ МНОЖЕСТВА И КОМПАКТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Учебное пособие для студентов математического факультета

Петрозаводск
Издательство ПетрГУ
2013

УДК 517.98
ББК 22.16
Г19

Издается в рамках реализации комплекса мероприятий Программы стратегического развития ПетрГУ на 2012–2016 гг.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Петрозаводского государственного университета

Рецензенты:
канд. физ.-мат. наук, доц. *С. Ю. Граф*
(Тверской государственный университет);
д-р физ.-мат. наук, проф. *В. В. Старков*
(Петрозаводский государственный университет);
канд. физ.-мат. наук, доц. *В. А. Шестаков*
(Петрозаводский государственный университет)

Г19 **Ганенкова, Е. Г.**

Функциональный анализ: компактные множества и компактные операторы : учебное пособие для студентов математического факультета / Е. Г. Ганенкова, К. Ф. Амозова. – Петрозаводск : Изд-во ПетрГУ, 2013. – 32 с.

ISBN 978-5-8021-1784-2

Пособие содержит теоретический материал, задачи и упражнения по некоторым разделам курса «Функциональный анализ».

Предназначено для студентов математических специальностей университетов, а также может быть полезно аспирантам и преподавателям.

УДК 517.98
ББК 22.16

ISBN 978-5-8021-1784-2

Содержание

Введение **4**

1. Компактные множества **5**

2. Компактные операторы **15**

Ответы **21**

Предметный указатель **22**

Список литературы **23**

Приложения **25**

Введение

Пособие содержит теоретический материал, задачи и упражнения по курсу «Функциональный анализ», раздел «Компактные множества и компактные операторы».

Отметим, что задачи по функциональному анализу довольно специфичны. Многие из них требуют изобретательности, особого подхода, глубоких знаний и функционального анализа, и смежных дисциплин (теории множеств, математического анализа и пр.). Сложность добавляет и абстрактность самого курса. Мы постарались включить в пособие задачи и упражнения среднего уровня сложности, доступные для самостоятельного решения и помогающие студентам разобраться в основных понятиях и методах функционального анализа.

Пособие состоит из двух разделов. В начале каждого излагаются основные понятия и теоретические сведения, необходимые для выполнения упражнений, а также предлагаются примеры решения типовых задач (если таковые по данной теме имеются). Все вычислительные и некоторые другие задачи снабжены ответами.

Часть упражнений, предложенных в пособии, заимствована из [1]–[10], многие из них подверглись обработке, часть задач составлена авторами.

Пособие предназначено для студентов классических университетов, обучающихся по направлениям «Математика» и «Прикладная математика».

Авторы выражают благодарность рецензентам за важные и полезные замечания при подготовке данного пособия.

1. Компактные множества

Пусть X — метрическое пространство, $M \subset X$.

Если из каждой последовательности x_n элементов множества M можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к элементу множества M, то множество M называется **секвенциально-компактным**.

Семейство открытых множеств $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$, где A — некоторое множество, называется **открытым покрытием** множества M, если

$$\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha \supset M.$$

Множество M в метрическом пространстве называется **компактным**, если из любого открытого покрытия этого множества можно выделить конечное подпокрытие, т. е. покрытие, состоящее из конечного числа множеств.

Теорема. *Для того чтобы множество в метрическом пространстве было компактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было секвенциально компактным.*

Множество M называется **предкомпактным**, если его замыкание компактно. Любое компактное множество является предкомпактным, обратное неверно.

Понятие компактного множества связано с понятием вполне ограниченного множества.

Пусть $\varepsilon > 0$, множество S называется **ε-сетью** для множества M, если для каждого элемента $x \in M$ найдется такой элемент $y \in S$, что $\rho(x, y) < \varepsilon$. Множество M называется **вполне ограниченным**, если для любого ε для M существует конечная ε-сеть. Каждое вполне ограниченное множество является ограниченным, обратное неверно.

Предкомпактные и вполне ограниченные множества связывает следующая теорема.

Теорема Хаусдорфа. *Для того чтобы множество в метрическом пространстве было предкомпактным, необходимо, а в случае* *полного пространства и достаточно, чтобы это множество было вполне ограниченным.*

Таким образом, перечисленные выше свойства множеств можно связать следующей диаграммой:

$$\begin{array}{c}
\textit{секвенциальная компактность}\\
\Updownarrow\\
\textit{компактность}\\
\Downarrow\\
\textit{предкомпактность}\\
\Downarrow \qquad \Updownarrow \text{(в полном пространстве)}\\
\textit{полная ограниченность}\\
\Downarrow\\
\textit{ограниченность}
\end{array}$$

Для проверки предкомпактности множества в конкретных пространствах удобно использовать специальные теоремы.

1. Предкомпактность в $C[a;b]$.

Дадим сначала необходимые определения.

Множество M из $C[a;b]$ называется **равномерно ограниченным**, если существует такая константа C, что для всех $x \in M$ выполняется неравенство $|x(t)| \leq C$ для всех $t \in [a;b]$.

Множество M из $C[a;b]$ называется **равностепенно непрерывным**, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, такое, что

$$|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon$$

для всех $t_1, t_2 \in [a;b]$, таких, что $|t_1 - t_2| < \delta$, и для всех $x \in M$.

Теорема Асколи – Арцела (критерий предкомпактности в $C[a;b]$**).** *Для того чтобы множество M было предкомпактно в $C[a;b]$, необходимо и достаточно, чтобы M было равномерно ограничено и равностепенно непрерывно.*

2. Предкомпактность в $l_p,\ 1 \le p < \infty$.

Теорема. *Для того чтобы множество M было предкомпактно в l_p, необходимо и достаточно, чтобы*

1) M было ограничено;

2) для произвольного $\varepsilon > 0$ существовал номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$, такой, что для всех $x = (x_1, x_2, \dots) \in M$ имело место неравенство

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} |x_k|^p < \varepsilon.$$

3. Предкомпактность в $L_p[a;b],\ 1 \le p < \infty$.

Теорема М. Рисса. *Для того чтобы множество M было предкомпактно в $L_p[a;b]$, необходимо и достаточно, чтобы*

1) M было ограничено;

2) для произвольного $\varepsilon > 0$ существовало $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что

$$\int_a^{b-h} |x(t+h) - x(t)|\, dt < \varepsilon$$

при $|h| < \delta$ для любого $x \in M$.

4. Предкомпактность в c_0.

Теорема. *Для того чтобы множество M было предкомпактно в c_0, необходимо и достаточно, чтобы*

1) M было ограничено;

2) для произвольного $\varepsilon > 0$ существовал номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$, такой, что для всех $x = (x_1, x_2, \dots) \in M$ имело место неравенство

$$\sup_{k > n_0} |x_k| < \varepsilon.$$

5. Предкомпактность в c.

Теорема. *Для того чтобы множество M было предкомпактно в c, необходимо и достаточно, чтобы*

1) M было ограничено;

2) для произвольного $\varepsilon > 0$ существовал номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$, такой, что для всех $x = (x_1, x_2, \dots) \in M$ имело место неравенство

$$\sup_{k > n_0} \left| x_k - \lim_{n\to\infty} x_n \right| < \varepsilon.$$

Пример 1. *Является ли предкомпактным множество M всех функций $x \in C[0;1]$, представимых в виде*

$$x(t) = \int\limits_0^1 ty(s)\, ds,$$

где $y \in C[0;1]$, $\|y\| \le 1$?

Решение. Покажем, что множество таких функций предкомпактно в $C[0;1]$. Для этого применим теорему Асколи – Арцела.

Пусть $x(t)$ – произвольная функция из M. Тогда для всех $t \in [0;1]$

$$|x(t)| = \left| \int\limits_0^1 ty(s)\, ds \right| \le t \cdot \int\limits_0^1 \max_{s\in[0;1]} |y(s)|\, ds \le 1 \cdot \|y\| \cdot \int\limits_0^1 ds \le 1.$$

Таким образом, множество M равномерно ограничено.

Покажем, что M равностепенно непрерывно. Для любого $\varepsilon > 0$ положим $\delta = \varepsilon$. Тогда для любой функции $x \in M$ и для любых $t_1, t_2 \in \in [0;1]$, таких, что $|t_1 - t_2| < \delta$, получим

$$|x(t_1) - x(t_2)| = \left| (t_1 - t_2) \int\limits_0^1 y(s)\, ds \right| \le |t_1 - t_2| \left| \int\limits_0^1 y(s)\, ds \right| \le$$

$$\le |t_1 - t_2| \cdot \|y\| \le |t_1 - t_2| < \delta = \varepsilon.$$

Следовательно, множество M является предкомпактным в $C[0;1]$.

Пример 2. *Является ли предкомпактным в l_p, $1 \le p < \infty$, множество $M = \left\{ (x_1, \dots, x_k, \dots) : |x_k| \le \dfrac{1}{k^2},\ k \in \mathbb{N} \right\}$?*

Решение. Применим критерий предкомпактности в l_p.

1) Проверим, что M ограничено. Пусть $x \in M$, тогда

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2p}}\right)^{\frac{1}{p}} = A^{\frac{1}{p}},$$

здесь A — константа, являющаяся суммой сходящегося ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^{2p}}$ (заметим, что $2p > 1$). Поэтому $x \in B[\theta; A^{\frac{1}{p}}] = \{x \in l_p : \|x\| \leq A^{\frac{1}{p}}\}$, т. е. M ограничено.

2) Пусть $\varepsilon > 0$, $x \in M$. Рассмотрим

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} |x_k|^p \leq \sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{1}{k^{2p}}.$$

Последняя сумма является остатком сходящегося ряда и, следовательно, стремится к нулю при $n_0 \to \infty$. Поэтому n_0 можно подобрать таким, что

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \varepsilon.$$

Значит,

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} |x_k|^p < \varepsilon$$

для всех $x \in M$.

В силу выполнения обоих условий множество M является предкомпактным.

Задачи

1.1. Доказать, что в метрическом пространстве любое компактное множество является ограниченным и замкнутым.

1.2. Показать, что существуют замкнутые и ограниченные, но некомпактные множества в метрических пространствах. Рассмотреть примеры:

а) пространство l_2 и $B[\theta; 1] = \{x \in l_2 : \|x\| \leq 1\}$;

б) пространство $C[0;1]$ и множество функций $f(x)$ из этого пространства, для которых $|f(x)| \leq A$, где A — фиксированное положительное число;

в) пространство $\mathbb{Q}$ с метрикой $\rho(p,q) = |p-q|$ и множество $M = \{p \in \mathbb{Q} : 3 < p^2 < 5\}$.

1.3. Показать, что любое замкнутое подмножество компактного множества компактно.

1.4. Пусть A_1, $A_2, \dots$ — компактные множества. Верно ли, что:

а) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ — компактное множество;

б) $\bigcup\limits_{n=1}^{N} A_n$ — компактное множество;

в) $\bigcap\limits_{n=1}^{N} A_n$ — компактное множество?

1.5. Проверить, что любое компактное множество M в метрическом пространстве (X,ρ) является полным метрическим пространством (M,ρ).

1.6. Дано компактное в метрическом пространстве $\mathbb{R}$ множество

$$M = \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots\right\}.$$

Для этого множества система интервалов

$$(-\varepsilon;\varepsilon); \ \left(\frac{1-\varepsilon}{2^n}; \frac{1+\varepsilon}{2^n}\right), n = 0, 1, \dots,$$

образует его подкрытие, где $\varepsilon \in (0;1/2)$ — фиксированное число. Выделить из этой системы интервалов конечную систему, покрывающую множество M.

1.7. Дано множество

$$M = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots\right\}$$

в метрическом пространстве $\mathbb{R}$. Его покрывают интервалы

$$\left(\frac{1-\varepsilon}{2^n}; \frac{1+\varepsilon}{2^n}\right), \ n = 0, 1 \ldots,$$

где $\varepsilon \in (0; 1/3)$ — фиксированное число. Можно ли из этого покрытия выделить конечное подпокрытие множества M?
Указание: исключить из системы хотя бы один интервал.

1.8. Дано замкнутое множество $M = \{1, 2, 3, \ldots\}$ в метрическом пространстве $\mathbb{R}$. Его покрывает бесконечная система интервалов $(1-\varepsilon; 1+\varepsilon)$, $(2-\varepsilon; 2+\varepsilon)$, $(3-\varepsilon; 3+\varepsilon), \ldots$, где ε — произвольное положительное число. Можно ли из этого покрытия выделить конечное подпокрытие множества M?

1.9. Дано ограниченное множество $(0; 1)$ в $\mathbb{R}$. Оно покрыто интервалами вида

$$\left(\frac{1}{n+2}; \frac{1}{n}\right), \ n = 1, 2, \ldots .$$

Можно ли из этого покрытия выделить конечное подпокрытие?
Указание: исключить из системы хотя бы один интервал.

1.10. Показать, что утверждение «из любого покрытия компактного множества замыканиями открытых множеств можно выделить конечное подпокрытие» неверно. Рассмотреть пример: отрезок $[0; 1]$, покрытый системой отрезков

$$[-1; 0], \ \left[\frac{1}{2}; 1\right], \ \left[\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right], \ \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right], \ldots .$$

1.11. Показать, что любое компактное множество является предкомпактным, обратное неверно.

1.12. Показать, что любое предкомпактное множество является ограниченным, обратное неверно.

1.13. Показать, что каждое вполне ограниченное множество является ограниченным, обратное неверно.

1.14. Показать, что целочисленные точки образуют на плоскости ε-сеть для любого $\varepsilon > 1/\sqrt{2}$.

1.15. Доказать, что если для множества A имеется ε-сеть S, то можно построить 2ε-сеть R для A, такую, что $R \subset A$.

1.16. Показать, что в n-мерном евклидовом пространстве полная ограниченность совпадает с ограниченностью.

1.17. Доказать утверждение: для того чтобы множество в метрическом пространстве было компактным, необходимо, а в случае полного пространства и достаточно, чтобы это множество было вполне ограниченным и замкнутым.

1.18. Являются ли предкомпактными в $C[0;1]$ множества:

а) $\{x : x(t) = n,\ n = 1, 2, \ldots\}$;

б) $\{x : x(t) = \ln(tn + 1),\ n = 1, 2, \ldots\}$;

в) $\{x : x(t) = t^n,\ n = 1, 2, \ldots\}$;

г) $\{x : x(t) = \sin(t + n),\ n = 1, 2, \ldots\}$;

д) $\{x : x(t) = \sin(at),\ a \in \mathbb{R}\}$;

е) $\{x : x(t) = \sin(at),\ a \in [0;1]\}$;

ж) $\{x : x(t) = e^{t-a},\ a \geq 0\}$;

з) $\left\{x : x(t) = \int\limits_0^t y(s)\,ds,\ y \in C[0;1], \|y\| \leq 1\right\}$;

и) $\left\{x : x(t) = \int\limits_0^1 K(t,s)y(s)\,ds,\ y \in C[0;1], \|y\| \leq 1,\right.$
$\left. K(t,s) \text{ непрерывна в } [0;1] \times [0;1]\right\}$;

к) $\left\{x : x(t) = a + \int\limits_0^t y'(s)\,ds,\ y \in C[0;1], \|y\| \leq 1,\right.$
$\left. a \text{ — фиксированная константа}\right\}$;

л) $\left\{x : x(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{t + n^2},\ |a_n| \leq 1\right\}$;

м) равномерно ограниченное множество функций $x = x(t) \in C[0;1]$, для которых выполняется условие Липшица

$$|x(t_1) - x(t_2)| \leq L|x_1 - x_2|$$

для всех $t_1, t_2 \in [0;1]$ с общей константой L;

н) равномерно ограниченное множество функций $x = x(t) \in C[0;1]$, для которых выполняется условие Гёльдера

$$|x(t_1) - x(t_2)| \leq \Gamma|x_1 - x_2|^\alpha,$$

$\alpha > 0$ для всех $t_1, t_2 \in [0;1]$ с общей константой Γ?

1.19. Являются ли предкомпактными в l_p, $1 \leq p < \infty$, множества:

а) $\left\{(x_1, \ldots, x_k, \ldots) : |x_k| \leq \dfrac{1}{k^{3/p}},\ k \in \mathbb{N}\right\}$;

б) $\left\{(x_1, \ldots, x_k, \ldots) : |x_k| \leq \dfrac{1}{3^k},\ k \in \mathbb{N}\right\}$;

в) $\left\{\left(\dfrac{1}{1+a}, \ldots, \dfrac{k}{1+a \cdot k^3}, \ldots\right) : a \in [1;2],\ k \in \mathbb{N}\right\}$;

г) $\left\{(x_1, \ldots, x_k, \ldots) : x_1 < 1,\ x_k > 0,\ x_{k+1} < \dfrac{x_k}{3},\ k \in \mathbb{N}\right\}$;

д) $\left\{(x_1, \ldots, x_k, \ldots) : x_{2k} = 0,\ 0 < x_{2k+1} \leq \dfrac{1}{3^k},\ k \in \mathbb{N}\right\}$;

е) $\left\{\left(\dfrac{1}{3^a}, \dfrac{1}{3^{2a}}, \ldots, \dfrac{1}{3^{k \cdot a}}, \ldots\right) : \dfrac{1}{p} \leq a \leq 2,\ k \in \mathbb{N}\right\}$;

ж) $\left\{\left(\dfrac{a}{1^{2/p}}, \dfrac{a}{2^{2/p}}, \ldots, \dfrac{a}{k^{2/p}}, \ldots\right) : 1 \leq a \leq 2012,\ k \in \mathbb{N}\right\}$;

з) $\left\{\left(\dfrac{\sin a}{3^{1/p}}, \dfrac{\sin 2a}{3^{2/p}}, \ldots, \dfrac{\sin ka}{3^{k/p}}, \ldots\right) : a \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}\right\}$;

и) $\{(a, 0, 0, \ldots) : 1 \leq a \leq 2012\}$;

к) $\left\{(x_1, x_2, \ldots) : |x_k| \leq a_k,\ k \in \mathbb{N}, \sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|^p < \infty\right\}$?

1.20. Является ли предкомпактным в $L_p[0;1], 1 \leq p < \infty$, множество функций $x(t)$, представимых в виде

$$x(t) = \int\limits_0^1 K(t,s)x(s)\,ds,$$

где $K(t,s)$ — фиксированная непрерывная на квадрате $[0;1] \times [0;1]$ функция, $y \in L_p[0;1]$, $\|y\| \leq 1$?

1.21. Являются ли предкомпактными в c_0 множества:

а) $\{(a, 0, 0, \ldots) :\ a \in \mathbb{R}\}$;

б) $\{(a, 0, 0, \ldots) :\ a \in [-1;1]\}$?

1.22. Являются ли предкомпактными в c множества:

а) $\left\{\left(\frac{a}{2}, \frac{2a}{3} \ldots, \frac{na}{n+1}, \ldots\right) :\ a \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}\right\}$;

б) $\left\{\left(\frac{a}{2}, \frac{2a}{3} \ldots, \frac{na}{n+1}, \ldots\right) :\ a \in [-1;1],\ n \in \mathbb{N}\right\}$?

2. Компактные операторы

Пусть X, Y — линейные нормированные пространства, $A : X \to Y$.

Оператор A называется **компактным**, если он каждое ограниченное множество из X переводит во вполне ограниченное множество из Y. Если при этом A непрерывен, то он называется **вполне непрерывным**.

Так как свойства полной ограниченности и предкомпактности множества в банаховом пространстве эквивалентны, то в этом случае для проверки компактности оператора удобно использовать критерии предкомпактности множеств в конкретных банаховых пространствах (см. раздел 1.).

Пример 1. *Является ли компактным оператор* $A : c_0 \to c_0$,

$$Ax = A(x_1, x_2, \dots) = \left(\frac{x_1}{\ln 2}, \frac{x_2}{\ln 3}, \dots, \frac{x_k}{\ln(k+1)}, \dots\right)?$$

Решение. Пусть M — ограниченное множество. Проверим, является ли множество $A(M)$ предкомпактным. Будем использовать критерий предкомпактности в c_0. Пусть $y \in A(M)$, тогда найдется $x \in M$, $y = Ax$, и, в силу ограниченности M, $\|x\| \leq C$, где C — некоторая константа.

1) Покажем, что $A(M)$ ограничено. Рассмотрим

$$\|y\| = \|Ax\| = \left\|\left(\frac{x_1}{\ln 2}, \frac{x_2}{\ln 3}, \dots, \frac{x_k}{\ln(k+1)}, \dots\right)\right\| =$$

$$= \max_k \left|\frac{x_k}{\ln(k+1)}\right| \leq \frac{\max\limits_k |x_k|}{\min\limits_{k \in \mathbb{N}} \ln(k+1)} = \frac{\|x\|}{\ln 2} \leq \frac{C}{\ln 2}.$$

Полученное неравенство говорит об ограниченности множества $A(M)$.

2) Пусть $\varepsilon > 0$, $y = (y_1, y_2, \dots) \in A(M)$, тогда

$$\sup_{k > n_0} |y_k| = \sup_{k > n_0} \left|\frac{x_k}{\ln(k+1)}\right| \leq \max_{k > n_0} |x_k| \cdot \sup_{k > n_0} \frac{1}{\ln(k+1)} \leq$$

$$\leq \max_{k\in\mathbb{N}} |x_k| \cdot \frac{1}{\ln((n_0+1)+1)} = \|x\| \cdot \frac{1}{\ln(n_0+2)} \leq C \cdot \frac{1}{\ln(n_0+2)}.$$

Так как при $n_0 \to \infty$ выражение $\dfrac{1}{\ln(n_0+2)} \to 0$, то n_0 можно взять настолько большим, что $\dfrac{1}{\ln(n_0+2)} < \dfrac{\varepsilon}{C}$, поэтому $\sup\limits_{k>n_0} |y_k| < \varepsilon$ для любого $y \in A(M)$.

Выполнены оба условия критерия, значит $A(M)$ — предкомпактное множество и A — компактный оператор.

Задачи

2.1. Являются ли компактными следующие операторы $A : C[0;1] \to C[0;1]$:

а) $Ax(t) = \varphi(t)x(t_0)$, где $\varphi(t)$ — фиксированная функция из $C[0;1]$, t_0 — фиксированное число из $[0;1]$;

б) $Ax(t) = \int\limits_0^t sx(s)\,ds + t$;

в) $Ax(t) = x(0) + tx\left(\frac{1}{2}\right) + t^2x(1) + t^3x\left(\frac{1}{3}\right)$;

г) $Ax(t) = x(t^3)$;

д) $Ax(t) = \lambda \int\limits_0^1 K(t,s)x(s)\,ds + f(t)$, где $K(t,s)$ — фиксированная непрерывная на квадрате $[0;1]\times[0;1]$ функция, λ — фиксированная константа, $f(t)$ — фиксированная функция из $C[0;1]$?

2.2. Будут ли компактными следующие операторы $A : C[-1;1] \to C[-1;1]$:

а) $Ax(t) = 2x(t)$;

б) $Ax(t) = \dfrac{1}{3}\left(x(t) + x(-t) + x(0)\right)$?

2.3. Будет ли компактным оператор $Ax(t) = \dfrac{dx}{dt}$, действующий:

а) из $C^{(1)}[0;1]$ в $C[0;1]$;

б) из $C^{(2)}[0;1]$ в $C[0;1]$?

2.4. Будет ли компактным тождественный оператор $I : C^{(1)}[0;1] \to C[0;1]$?

2.5. Будет ли компактным оператор $A : L_p[0;1] \to L_p[0;1]$, $1 \le p < \infty$,

$$Ax(t) = \int\limits_0^t (1+s)x(s)\,ds?$$

2.6. Является ли компактным оператор $A : l_p \to l_1$, $1 < p < \infty$, действующий по формуле

$$A(x_1, x_2, \ldots) = \left(\frac{x_1}{1}, \frac{x_2}{2}, \ldots, \frac{x_k}{k}, \ldots\right)?$$

2.7. Будет ли компактным тождественный оператор $I : l_p \to l_q, 1 \le p, q \le \infty$?

2.8. Показать, что оператор $A : l_p \to l_p$, $1 \le p < \infty$, действующий по формуле

$$A(x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, 0, x_2, 0, x_3, \ldots)\,,$$

не является компактным, хотя A^2 компактен.

2.9. Является ли компактным оператор $A : l_p \to l_q$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, действующий по формуле

$$A(x_1, x_2, \ldots) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{1j} \cdot x_1, \sum_{j=1}^{\infty} a_{2j} \cdot x_2, \ldots\right),$$

где $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \sum\limits_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^q < \infty$?

2.10. Являются ли компактными операторы, действующие из l_p в l_p, $1 \le p < \infty$:

а) правого сдвига $T_r(x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots)$;

б) левого сдвига $T_l(x_1, x_2, \ldots) = (x_2, x_3, x_4, \ldots)$;
в) $Ax = (\|x\|, 0, 0, \ldots)$?

2.11. Является ли компактным оператор $A : l_1 \to l_1$,

$$A(x_1, x_2, \ldots) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n, 0, 0, \ldots\right)?$$

2.12. Является ли компактным оператор $A : l_p \to l_p$, $1 < p < \infty$,

$$A(x_1, x_2, \ldots) = \left(x_1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right)?$$

2.13. Является ли компактным оператор $A : c_0 \to c_0$,

$$A(x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, 0, x_2, 0, x_3, \ldots)?$$

2.14. Являются ли компактными операторы $A : c \to c$:

а) $A(x_1, x_2, \ldots) = \left(x_1, \lim\limits_{n\to\infty} x_n,\ x_2, \lim\limits_{n\to\infty} x_n,\ x_3, \ldots\right)$;
б) $A(x_1, x_2, \ldots) = \left(\dfrac{x_1}{2^1}, \dfrac{x_2}{2^2}, \ldots, \dfrac{x_k}{2^k}, \ldots\right)$;
в) $A(x_1, x_2, \ldots) = \left(\dfrac{x_1}{1!}, \dfrac{x_2}{2!}, \ldots, \dfrac{x_k}{k!}, \ldots\right)$;
г) $A(x_1, x_2, \ldots) = \left(\dfrac{x_1}{1^1}, \dfrac{x_2}{2^2}, \ldots, \dfrac{x_k}{k^k}, \ldots\right)$;
д) $A(x_1, x_2, \ldots) = (x_1 + x_2,\ x_2 + x_3, \ldots,\ x_k + x_{k+1}, \ldots)$;
е) $A(x_1, x_2, \ldots) = (x_1 - x_2,\ x_2 - x_3, \ldots,\ x_k - x_{k+1}, \ldots)$;
ж) $A(x_1, x_2, \ldots) = (x_1 x_2,\ x_2 x_3, \ldots,\ x_k x_{k+1}, \ldots)$;
з) $A(x_1, x_2, \ldots) = (y_1, y_2, \ldots)$, где для $k = 1, 2, \ldots$

$$y_k = \begin{cases} \dfrac{x_k}{x_{k+1}}, & \text{если } x_k \neq 0 \text{ и } \lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq 0, \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases}$$

и) левого сдвига $T_l(x_1, x_2, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots)$;

к) правого сдвига $T_r(x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots)$;

л) $A(x_1, x_2, \ldots) = \left(x_1, \dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \ldots\right)$?

2.15. Пусть $a = (a_1, a_2, \ldots)$, $b = (b_1, b_2, \ldots)$ – фиксированные последовательности из пространства c. При каких условиях на a и b оператор $A : c \to c$,

$$A(x_1, x_2, \ldots) = (b_1 x_1 + a_1 x_2, \ldots,\ b_k x_k + a_k x_{k+1}, \ldots)\,,$$

будет компактным?

2.16. Показать, что если $\varphi \in C[0;1]$ и $\varphi(t) \not\equiv 0$ на $[0;1]$, то оператор $A : C[0;1] \to C[0;1]$, $Ax(t) = \varphi(t)x(t)$ не является компактным.

Указание: рассмотреть точки $t_1 = \dfrac{1}{2}$, $t_2 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n}$ и функции

$$x_n(t) = \begin{cases} -\dfrac{1}{\varphi(t_0)}, & \text{если } \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n} \le t \le 1; \\ -2^{n-1}(2t - 1), & \text{если } \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n} < t < \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n}; \\ \dfrac{1}{\varphi(t_0)}, & \text{если } 0 \le t \le \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n}, \end{cases}$$

где число $t_0 \in [0;1]$, такое, что $\varphi(t_0) \ne 0$.

2.17. Показать, что если $\varphi \in L_\infty[0;1]$, такая, что $\varphi(t) \ne 0$ почти всюду на $[0;1]$, то оператор $A : L_p[0;1] \to L_p[0;1]$, $1 \le p < \infty$, $Ax(t) = \varphi(t)x(t)$ не является компактным.

Указание: рассмотреть функции

$$x_n(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varphi(t)}, & \text{если } t \in [0; 1/n],\ \varphi(t) \ne 0; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

2.18. Является ли компактным оператор суперпозиции $A : C[0;1] \to C[0;1]$, $Ax(t) = x(\varphi(t))$, где $\varphi(t)$ — фиксированное непрерывное взаимно однозначное отображение отрезка $[0;1]$ на себя?

2.19. Пусть $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ – некоторая фиксированная последовательность. Показать, что оператор $A : l_p \to l_p$, $1 \le p < \infty$, действующий по формуле

$$A(x_1, x_2, \ldots) = (a_1 x_1, a_2 x_2, \ldots)\,,$$

компактен тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

2.20. Пусть $a = (a_1, a_2, \ldots)$ — фиксированная ограниченная последовательность. Показать, что следующий оператор $A : c_0 \to c_0$,

$$A(x_1, x_2, \ldots) = (a_1 x_1, a_2 x_2, \ldots)\,,$$

компактен тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

2.21. Пусть $a = (a_1, a_2, \ldots)$ — фиксированный элемент из c. Показать, что оператор $A : c \to c$,

$$A(x_1, x_2, \ldots) = (a_1 x_1, a_2 x_2, \ldots)\,,$$

компактен тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Ответы

1.4. **а)** нет, **б)** да, **в)** да.
1.7. Нет.
1.8. Нет.
1.9. Нет.
1.10. Нет.
1.18. **а)** нет, **б)** нет, **в)** нет, **г)** да, **д)** нет, **е)** да, **ж)** да, **з)** да, **и)** да, **к)** да, **л)** да, **м)** да, **н)** да.
1.19. **а) - к)** да.
1.20. Да.
1.21. **а)** нет, **б)** да.
1.22. **а)** нет, **б)** да.
2.1. **а)** да, **б)** да, **в)** да, **г)** нет, **д)** да.
2.2. **а)** нет, **б)** нет.
2.3. **а)** нет, **б)** да.
2.4. Да.
2.5. Да.
2.6. Да.
2.7. Нет.
2.9. Да.
2.10. **а)** нет, **б)** нет, **в)** да.
2.11. Да.
2.12. Да.
2.13. Нет.
2.14. **а)** нет, **б)** да, **в)** да, **г)** да, **д)** нет, **е)** нет, **ж)** нет, **з)** нет, **и)** нет, **к)** нет, **л)** нет.
2.15. $a = b = \theta$.
2.18. Нет.

Предметный указатель

ε-сеть, 5

Множество
- вполне ограниченное, 5
- компактное, 5
- предкомпактное, 5
- равномерно ограниченное, 6
- равностепенно непрерывное, 6
- секвенциально компактное, 5

Оператор
- вполне непрерывный, 15
- компактный, 15

Открытое покрытие, 5

Список литературы

1. Антоневич А. Б. Задачи и упражнения по функциональному анализу / А. Б. Антоневич, П. Н. Князев, Я. В. Радыно. — М. : КомКнига, 2006.
2. Бородин П. А. Задачи по функциональному анализу : в 2 ч. / П. А. Бородин, А. М. Савчук, И. А. Шейпак. — М. : Изд-во ЦПИ, 2009.
3. Городецкий В. В. Методы решения задач по функциональному анализу / В. В. Городецкий, Н. И. Нагнибида, П. П. Настасиев. — М. : Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010.
4. Канторович Л. В. Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. — М. : Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1984.
5. Кириллов А. А. Теоремы и задачи функционального анализа / А. А. Кириллов, А. Д. Гвишиани. — М. : Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1979.
6. Колмогоров А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. — М. : Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1976.
7. Очан Ю. С. Сборник задач по математическому анализу: Общая теория множеств и функций / Ю. С. Очан. — М. : Просвещение, 1981.
8. Пугачев В. С. Лекции по функциональному анализу / В. С. Пугачев. — М. : Изд-во МАИ, 1996.

9. Треногин В. А. Задачи и упражнения по функциональному анализу / В. А. Треногин, Б. М. Писаревский, Т. С. Соболева. — М. : Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1984.
10. Треногин В. А. Функциональный анализ / В. А. Треногин. — М. : Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1980.

Приложения

Приложение 1. Основные метрические пространства

Пространство	Описание	Метрика
X_d	Пространство с дискретной метрикой — произвольное множество X с метрикой $d(x, y)$	Для $x, y \in X$ $d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = y, \\ 1, & \text{если } x \neq y \end{cases}$
s	Пространство всех числовых последовательностей $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, $x_k \in \mathbb{R}$ (или $x_k \in \mathbb{C}$)	Для $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, $y = \{y_k\}_{k=1}^{\infty} \in s$ $\rho(x, y) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\lvert x_k - y_k \rvert}{1 + \lvert x_k - y_k \rvert}$
B_0	Пространство числовых последовательностей $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, $x_k \in \mathbb{N}$	Для $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, $y = \{y_k\}_{k=1}^{\infty} \in B_0$ $\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = y, \\ \frac{1}{k}, & \text{если } x \neq y, \end{cases}$ где k — номер первой координаты, для которой $x_k \neq y_k$
$\mathbb{N}$	Пространство натуральных чисел	Для $x, y \in \mathbb{N}$ $\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = y, \\ 1 + \frac{1}{x+y}, & \text{если } x \neq y \end{cases}$
Из любого нормированного пространства можно получить метрическое введением метрики $\rho(x, y) = \lVert x - y \rVert$		

Приложение 2. Основные нормированные пространства

Пространство	Описание	Норма
$\mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$	n-мерное пространство векторов $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{R}$ (или $x_i \in \mathbb{C}$), $i = 1, \ldots, n$	$\|x\| = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \|x_i\|^2\right)^{1/2}$
l_p	Пространство последовательностей $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, таких, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^p < \infty$, где $1 \leq p < \infty$	$\|x\| = \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^p\right)^{1/p}$
l_∞	Пространство ограниченных числовых последовательностей $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, т. е. таких, что $\sup\limits_i \|x_i\| < \infty$	$\|x\| = \sup\limits_i \|x_i\|$
c	Пространство сходящихся последовательностей $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$	$\|x\| = \sup\limits_i \|x_i\|$
c_0	Пространство последовательностей $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, сходящихся к нулю, т. е. таких, что $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = 0$	$\|x\| = \max\limits_i \|x_i\|$
c^n	Пространство векторов $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_i \in \mathbb{R}$ (или $x_i \in \mathbb{C}$), $i = 1, \ldots, n$	$\|x\| = \max\limits_i \|x_i\|$
$C[a;b]$	Пространство непрерывных на отрезке $[a;b]$ функций $x = x(t)$	$\|x\| = \max\limits_{t\in[a;b]} \|x(t)\|;$
$C_p[a;b]$	Пространство непрерывных на отрезке $[a;b]$ функций $x = x(t)$ с нормой $\|\cdot\|_p$, где $1 \leq p < \infty$	$\|x\| = \left(\int\limits_a^b \|x(t)\|^p dt\right)^{1/p}$

Пространство	**Описание**	**Норма**
$C[a;+\infty)$	Пространство функций $x = x(t)$, непрерывных на промежутке $[a;+\infty)$, для которых $\sup\limits_{t\in[a;+\infty)} \lvert x(t)\rvert < +\infty$	$\lVert x\rVert = \sup\limits_{t\in[a;+\infty)} \lvert x(t)\rvert$
$C^{(n)}[a;b]$	Пространство n раз непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a;b]$ функций $x = x(t)$	$\lVert x\rVert = \sum\limits_{k=0}^{n} \max\limits_{t\in[a;b]} \lvert x^{(k)}(t)\rvert$
$L_p[a;b]$	Пространство классов эквивалентных функций $x = x(t)$, суммируемых по Лебегу со степенью p на $[a;b]$, где $1 \leq p < \infty$, т. е. таких, что $\int\limits_a^b \lvert x(t)\rvert^p dt < \infty$	$\lVert x\rVert = \left(\int\limits_a^b \lvert x(t)\rvert^p dt\right)^{1/p}$
$L_\infty[a;b]$	Пространство классов эквивалентных измеримых функций $x = x(t)$, существенно ограниченных на $[a;b]$	$\lVert x\rVert = \operatorname{ess\,sup}\limits_{t\in[a;b]} \lvert x(t)\rvert$
$V[a;b]$	Пространство функций $x = x(t)$ с ограниченной на $[a;b]$ вариацией	$\lVert x\rVert = \lvert x(a)\rvert + \mathop{\mathbf{V}}\limits_a^b x(t)$, где $\mathop{\mathbf{V}}\limits_a^b x(t)$ — полная вариация функции $x(t)$ на отрезке $[a;b]$
$H(\triangle)$	Пространство функций $x = x(z)$, аналитических в единичном круге $\triangle$ и непрерывных в $\overline{\triangle}$	$\lVert x\rVert = \max\limits_{\lvert z\rvert=1} \lvert x(z)\rvert$

Приложение 3. Основные гильбертовы пространства

Пространство	Описание	Скалярное произведение
$\mathbb{R}^n$	n-мерное пространство векторов $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$	Для $x = \{x_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{R}^n$, $y = \{y_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{R}^n$: $(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$
$\mathbb{C}^n$	n-мерное пространство векторов $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \ldots, n$	Для $x = \{x_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{C}^n$, $y = \{y_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{C}^n$: $(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i$
l_2	Пространство последовательностей $x = \{x_k\}_{k=1}^\infty$, удовлетворяющих условию $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lvert x_k\rvert^2 < \infty$	Для $x = \{x_k\}_{k=1}^\infty \in l_2$, $y = \{y_k\}_{k=1}^\infty \in l_2$: $(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y}_i$
$L_2[a; b]$	Пространство классов эквивалентных функций $x = x(t)$, суммируемых по Лебегу в квадрате на $[a; b]$, т. е. таких, что $\int\limits_a^b \lvert x(t)\rvert^2 dt < \infty$	Для $x = x(t) \in L_2[a; b]$, $y = y(t) \in L_2[a; b]$: $(x, y) = \int\limits_a^b x(t)\overline{y(t)}dt$

Учебное издание

Ганенкова Екатерина Геннадьевна
Амозова Кира Федоровна

Функциональный анализ: компактные множества и компактные операторы

Учебное пособие для студентов математического факультета

Редактор *Е. Е. Порывакина*
Компьютерная верстка *Е. Г. Ганенковой, К. Ф. Амозовой*

Издание подготовлено с использованием стилевой опции RUSBOOKW.STY *Б. М. Широкова*

Подписано в печать 30.11.13. Формат 60 × 84 1/16.
Бумага офсетная. Уч.-изд. л. 1,2.
Тираж 120 экз. Изд. № 324.

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего профессионального образования
ПЕТРОЗАВОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Отпечатано в типографии Издательства ПетрГУ
185910, г. Петрозаводск, пр. Ленина, 33.

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ДЛЯ ЗАМЕТОК