Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего образования
ПЕТРОЗАВОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

А. А. Ивашко

Теория вероятностей и математическая статистика

Учебное пособие для студентов физико-технического факультета

Петрозаводск
Издательство ПетрГУ
2016

УДК 519.2
ББК 22.172
И244

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Петрозводского государственного университета

Издается в рамках реализации комплекса мероприятий
Программы стратегического развития ПетрГУ на 2012–2016 гг.

Рецензенты:
канд. физ.-мат. наук, доц. *М. М. Кручек*
(Петрозаводский государственный университет);
канд. физ.-мат. наук, доц. *И. А. Чеплюкова*
(Институт прикладных математических исследований Карельского
научного центра Российской академии наук)

Ивашко, Анна Антоновна.

И244 Теория вероятностей и математическая статистика : учебное пособие для студентов физико-технического факультета / А. А. Ивашко ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Федер. гос. бюджет. образоват. учреждение высш. образования Петрозавод. гос. ун-т. — Петрозаводск : Издательство ПетрГУ, 2016. — 76 с.

ISBN 978-5-8021-2742-2

Учебное пособие содержит краткий теоретический материал и задачи по курсу «Теория вероятностей и математическая статистика».

Предназначено для студентов технических специальностей вузов, а также преподавателей, проводящих занятия по данному курсу.

УДК 519.2
ББК 22.172

ISBN 978-5-8021-2742-2

Содержание

Введение

В учебном пособии рассматриваются основные вопросы курса «Теория вероятностей и математическая статистика», представлены типовые примеры, а также задачи для проведения практических занятий и самостоятельной работы.

Пособие состоит из двух частей — «Теория вероятностей» и «Математическая статистика», которые в свою очередь поделены на разделы. В первой части приводятся основные понятия теории вероятностей, операции над событиями и некоторые схемы вычисления вероятностей случайных событий. Также изложен материал, описывающий случайные величины и законы распределения вероятностей случайной величины. Во второй части даются основные методы обработки статистических данных. В начале каждого раздела излагаются краткие теоретические сведения, основные понятия и формулы, необходимые для решения задач. Разобраны примеры решения типовых упражнений с различным физическим и техническим содержанием. Приведены задачи для самостоятельного решения, ответы к ним даются в конце каждого раздела. Часть задач заимствована из [1]–[13] и переработана, часть составлена автором.

Пособие предназначено как для проведения практических занятий по курсу «Теория вероятностей и математическая статистика», так и для самостоятельного изучения материала. Приведенные образцы решения задач помогут студентам при самостоятельной работе.

Предлагаемое учебное пособие адресовано студентам технических специальностей вузов, а также будет полезно всем, кто интересуется вопросами теории вероятностей и математической статистики.

Автор выражает благодарность М. М. Кручек и И. А. Чеплюковой за помощь и важные замечания при подготовке данного пособия.

1. Теория вероятностей

1.1. Элементы комбинаторики

Комбинаторика изучает способы подсчета количества комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, которые можно составить из заданного конечного множества объектов. Формулы комбинаторики используют при решении многих задач теории вероятностей.

Приведем основные правила и формулы комбинаторики.

Правило умножения: если элемент a может быть выбран из множества элементов n способами и при любом таком выборе элемент b может быть выбран m способами, то пара (a, b) может быть выбрана $n \cdot m$ способами.

Правило суммы: если элемент a может быть выбран из множества элементов n способами, а элемент b может быть выбран m способами, то выбрать a или b можно $n + m$ способами.

Пусть имеется множество, состоящее из n элементов.

Перестановкой без повторений из n элементов данного множества называется всякий упорядоченный набор из этих n элементов.

Число всевозможных перестановок (без повторений) из n элементов равно

$$P_n = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!,$$

где $n!$ называется факториалом числа n. По определению, $0! = 1$.

Если среди n элементов a_1, a_2, a_3, ..., a_n имеются одинаковые, причем a_1 повторяется k_1 раз, a_2 — k_2 раз, ..., a_n — k_n раз, то число таких **перестановок с повторениями** равно

$$\bar{P}_n = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_n!}.$$

Размещением без повторений из n элементов данного множества по k называется упорядоченный набор из k различных элементов, выбранных из данных n элементов.

Перестановка также является размещением из n элементов по n.

Число всевозможных размещений (без повторений) из n элементов по k равно

$$A_n^k = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Размещения могут отличаться друг от друга как составом элементов, так и их порядком.

Если при размещении n элементов по k каждый элемент может повторяться сколько угодно раз, то число таких **размещений с повторениями** равно

$$\bar{A}_n^k = n^k.$$

Сочетанием из n элементов по k называется набор k элементов, выбранных из данных n элементов, которые отличаются хотя бы одним элементом.

В сочетаниях наборы, отличающиеся только порядком следования элементов (но не составом), считаются одинаковыми, в отличие от размещений.

Число всевозможных сочетаний из n элементов по k равно

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Основные свойства сочетаний:

$$C_n^k = C_n^{n-k}, \qquad C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}.$$

Пример 1. Дано множество, состоящее из трех элементов $\{1, 2, 3\}$. Найти число всевозможных: а) перестановок, б) размещений по два элемента (с повторениями и без), в) сочетаний по два элемента.

Решение. а) Так как в данном множестве элементы не повторяются, то всевозможными перестановками без повторений являются наборы (1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 3, 1), (2, 1, 3), (3, 2, 1), (3, 1, 2). Число таких перестановок равно $P_3 = 3! = 6$.

б) Различными размещениями без повторений из трех элементов $\{1, 2, 3\}$ по два будут наборы (1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (2, 3), (3, 2). Число таких размещений равно $A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6$.

Различными размещениями с повторениями из трех элементов $\{1, 2, 3\}$ по два будут наборы (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3). Число таких размещений равно $\bar{A}_3^2 = 3^2 = 9$.

в) Различными сочетаниями из трех элементов $\{1, 2, 3\}$ по два будут наборы $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$. Число таких сочетаний равно $C_3^2 = \dfrac{3!}{2! \cdot 1!} = 3$.

Пример 2. Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр, не равных нулю?

Решение. Всего цифр, не равных нулю, 9. Число всевозможных чисел равно числу размещений с повторениями и находится по формуле $\bar{A}_9^4 = 9^4 = 6\,561$.

Пример 3. Сколькими способами можно разложить два различных шара (черный и белый) по трем ящикам, если в любой ящик можно положить не более одного шара?

Решение. Первый шар можно положить в один из трех ящиков тремя способами. Затем второй шар можно положить в оставшиеся 2 ящика двумя способами. Число способов разложить два различных шара равно $A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6$.

Пример 4. Сколькими способами из 9 человек можно выбрать комиссию из трех человек?

Решение. Состав комиссии должен отличаться хотя бы одним человеком. Следовательно, число способов выбрать комиссию равно $\mathrm{C}_9^3 = \dfrac{9!}{3! \cdot 6!} = 84$.

Задачи

1. Сколькими различными маршрутами можно разнести корреспонденцию в 5 адресов?

2. Сколькими способами можно выбрать четырех претендентов из шести на четыре различные должности?

3. Студентам надо сдать 3 экзамена за 7 дней. Сколькими способами можно составить расписание сдачи экзаменов?

4. Сколько слов можно составить из слова ИЗМЕРЕНИЕ перестановкой букв?

5. Из трех групп студентов нужно составить команду для соревнований, взяв по одному человеку из группы. Сколько различных команд можно составить, если в одной группе 20, в другой — 22, а в третьей — 24 студента?

6. На книжной полке находится 8 книг. Сколькими способами из них можно выбрать 3 книги?

7. Имеется 5 видов конвертов без марок и 4 вида марок одного достоинства. Сколькими способами можно выбрать конверт с маркой для посылки письма?

8. В жюри 10 человек. Трое голосуют за, семеро – против. Сколько возможно комбинаций при голосовании?

9. Группа студентов из 30 человек решила обменяться фотокарточками. Сколько фотокарточек понадобилось для этого?

10. Сколько слов можно составить из слова СТАТИСТИКА перестановкой букв?

11. Номер машины состоит из 3 букв и 3 цифр. Сколько всего существует различных номеров, если для написания номера используется 12 букв?

Ответы

1. 120 **2.** 360 **3.** 210 **4.** 30 240 **5.** 10 560 **6.** 56 **7.** 20 **8.** 120 **9.** 870 **10.** 75 600 **11.** 1 728 000

1.2. Основные определения теории вероятностей. Вычисление вероятностей в классической схеме. Геометрические вероятности

Под **экспериментом (или испытанием)** будем понимать выполнение определенных условий, при которых наблюдается изучаемое явление. Например, экспериментом будет бросание монеты или игрального кубика, стрельба по мишени, извлечение шара из ящика и т. д.

Рассмотрим множество взаимоисключающихся исходов эксперимента. Оно называется **пространством элементарных исходов** и обозначается Ω. Например, при бросании монеты Ω состоит из двух элементов. Элементы пространства Ω будем обозначать буквой ω и называть **элементарными событиями** (или исходами).

Событием будем называть любое подмножество Ω. События обозначаются заглавными буквами латинского алфавита A, B, $C, \ldots$.

Событие, состоящее из всего множества Ω называется **достоверным**. Пустое множество $\varnothing$ называется **невозможным** событием.

Для количественной оценки возможности появления случайного события вводится понятие вероятности. Далее будем предполагать, что множество Ω состоит из конечного числа элементарных событий. Говорят, что заданы вероятности элементарных событий, если на Ω задана неотрицательная числовая функция $\mathbf{P}$, такая, что

$$\sum_{\omega \in \Omega} \mathbf{P}(\omega) = 1.$$

Вероятностью события A называется число $\mathbf{P}(A) = \sum\limits_{\omega \in A} \mathbf{P}(\omega)$.

Пусть Ω состоит из n элементов и все исходы равновероятны, т. е. $\mathbf{P}(\omega) = \dfrac{1}{n}$ для любого $\omega \in \Omega$.

Вероятностью события A называется отношение числа m элементарных исходов, благоприятствующих данному событию A, к числу n всех равновозможных исходов эксперимента:

$$\mathbf{P}(A) = \frac{m}{n}.$$

Это так называемое **классическое определение вероятности**.

Перечислим некоторые свойства вероятности:

1) $\mathbf{P}(\Omega) = 1$;

2) $\mathbf{P}(\varnothing) = 0$;

3) если A случайное событие, то $0 < \mathbf{P}(A) < 1$.

На практике встречаются эксперименты, для которых множество элементарных исходов бесконечно. В случае если эксперимент сводится к бросанию точки в область G прямой, плоскости или пространства, то можно использовать **геометрическое определение вероятности**.

Пусть множество G_1 принадлежит множеству G. Обозначим меру области G_1 (длину, площадь или объем) через $mes\, G_1$ и меру области G — $mes\, G$. Тогда **вероятность** события A, которое состоит в том, что наудачу брошенная точка в область G попадет в область G_1, вычисляется по формуле

$$\mathbf{P}(A) = \frac{mes\, G_1}{mes\, G}.$$

Пример 1. Из ящика, в котором 7 красных и 14 синих шаров, наудачу извлекается один шар. Какова вероятность того, что извлечен синий шар?

Решение. Обозначим $A = \{\text{извлечен синий шар}\}$. Будем использовать классическое определение вероятности. Получим $m = 14$ — число способов извлечь синий шар из ящика, содержащего $n = 21$ шар. Тогда, используя классическое определение вероятности, получим: $\mathbf{P}(A) = \dfrac{m}{n} = \dfrac{14}{21} = \dfrac{2}{3}$.

Пример 2. В партии из 10 деталей 6 бракованных. Для проверки отбирают 5 деталей. Найти вероятность того, что при проверке окажется две бракованные детали.

Решение. Пусть $A = \{\text{среди 5 деталей 2 бракованные}\}$. Число способов выбрать 5 деталей из 10 (общего количества деталей) равно $n = C_{10}^5 = \dfrac{10!}{5! \cdot 5!} = \dfrac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 252$. Число способов, благоприятствующих событию A, равно $m = C_6^2 \cdot C_4^3 = 15 \cdot 4 = 60$, так как необходимо учесть все способы отобрать 2 бракованные детали из 6 бракованных в исходной партии и 3 нормальные из 4 нормальных в исходной партии. Используя классическое определение вероятности, получим: $\mathbf{P}(A) = \dfrac{m}{n} = \dfrac{60}{252} = \dfrac{5}{21}$.

Пример 3. В квадрат со стороной a вписан круг. Найти вероятность того, что точка, брошенная в квадрат, окажется внутри круга.

Решение. Обозначим искомое событие через A, квадрат — G, а круг — G_1. Мерой фигур в данном случае будет площадь S. Тогда, используя геометрическое определение вероятности, найдем

$$\mathbf{P}(A) = \frac{mes\,G_1}{mes\,G} = \frac{S(G_1)}{S(G)} = \frac{\frac{a^2\pi}{4}}{a^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Задачи

1. Набирая номер телефона, абонент забыл последнюю цифру и набрал ее наудачу. Найти вероятность того, что набрана нужная цифра.

2. Брошено 3 монеты. Найти вероятности событий:

   а) первая монета выпала гербом вверх;

   б) выпало 2 герба;

   в) выпало не больше двух гербов.

3. Наудачу взят телефонный номер, состоящий из 5 цифр. Чему равна вероятность того, что все цифры различные? Известно, что номер не может начинаться с цифры 0.

4. Из 50 вопросов, входящих в экзаменационные билеты, студент подготовил 45. Какова вероятность того, что вытянутый студентом билет, содержащий два вопроса, будет включать в себя подготовленные вопросы?

5. На полке находится 10 книг, 5 из них по теории вероятностей. Берут наудачу 3 книги. Какова вероятность того, что все 3 книги по теории вероятностей?

6. Из урны, содержащей 8 белых и 5 черных шаров, наудачу извлекается 6 шаров. Какова вероятность того, что среди выбранных шаров окажется ровно 3 черных?

7. В стопке находятся контрольные работы группы студентов, в которой 15 юношей и 8 девушек. Наудачу взяты 3 контрольные работы. Найти вероятность того, что они принадлежат юношам.

8. Из колоды в 36 карт извлекают 3. Какова вероятность того, что среди них окажется ровно две карты пиковой масти?

9. В отрезок [0, 1] наудачу бросается точка. Найти вероятность того, что эта точка попадет в отрезок [0,3; 0,5] или [0,6; 0,9].

10. В круг радиусом R наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в круг:

    а) квадрата;

    б) правильного треугольника;

    в) правильного шестиугольника.

11. На плоскости даны единичный квадрат и парабола $y = x^2$. Найти вероятность того, что наугад брошенная точка в квадрат попадет в область, ограниченную параболой и осью OX.

12. Дано два концентрических круга с радиусами 5 см и 10 см. Найти вероятность того, что точка, наугад брошенная в больший круг, попадет в кольцо, образованное границами кругов.

Ответы

1. 0,1 **2.** а) 0,5; б) 0,375; в) 0,875 **3.** 0,3024 **4.** 0,808 **5.** 0,083 **6.** 0,326 **7.** 0,257 **8.** 0,136 **9.** 0,5 **10.** а) $\dfrac{2}{\pi}$; б) $\dfrac{3\sqrt{3}}{4\pi}$; в) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2\pi}$ **11.** 0,333 **12.** 0,75

1.3. Сложение и умножение вероятностей. Формула полной вероятности. Формулы Байеса

Рассмотрим следующие операции над событиями.

Суммой событий A и B называется такое событие $A+B$, которое означает наступление A или B.

Произведением событий A и B называется событие $A \cdot B$, состоящее в одновременном их появлении.

Противоположное к A событие обозначается $\bar{A}$ и состоит в непоявлении события A.

Вероятности противоположных событий связаны равенством

$$\mathbf{P}(A) = 1 - \mathbf{P}(\bar{A}).$$

Два события называются **несовместными**, если появление одного из них исключает появление другого в данном эксперименте.

Сложение вероятностей:

1. Вероятность суммы двух несовместных событий A и B равна сумме вероятностей этих событий:

$$\mathbf{P}(A + B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B).$$

2. Вероятность суммы двух совместных событий A и B равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$\mathbf{P}(A + B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cdot B).$$

Условная вероятность события A при условии, что произошло событие B, по определению, равна

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(A \cdot B)}{\mathbf{P}(B)}, \qquad \mathbf{P}(B) > 0.$$

События A и B называются **независимыми**, если

$$\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(A).$$

Умножение вероятностей:

1. Вероятность произведения двух событий A и B равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого при условии, что первое событие произошло:

$$\mathbf{P}(A \cdot B) = \mathbf{P}(B) \cdot \mathbf{P}(A|B).$$

2. Вероятность произведения двух независимых событий A и B равна произведению вероятностей этих событий:

$$\mathbf{P}(A \cdot B) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B).$$

События A_1,..., A_n называются **независимыми в совокупности**, если независимы каждые два из них и независимы каждое событие и все возможные произведения остальных.

Если события A_1,..., A_n независимы в совокупности, то вероятность события A, состоящего в появлении хотя бы одного из них, равна

$$\mathbf{P}(A) = 1 - \mathbf{P}(\bar{A}_1)\mathbf{P}(\bar{A}_2) \cdot ... \cdot \mathbf{P}(\bar{A}_n).$$

События $H_1, H_2, ..., H_n$ образуют **полную группу событий**, если они попарно несовместны и их сумма является достоверным событием, т. е. $H_i \cdot H_j = \varnothing, i \neq j$, $\sum\limits_{i=1}^{n} H_i = \Omega$. События H_i называют **гипотезами**.

Пусть события $H_1, H_2, ..., H_n$ образуют полную группу событий. Тогда для любого события A имеет место формула полной вероятности:

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(H_i)\mathbf{P}(A|H_i).$$

Если известно, что событие A наступило, то вероятности гипотез H_k становятся условными вероятностями и могут быть найдены по **формуле Байеса**:

$$\mathbf{P}(H_k|A) = \frac{\mathbf{P}(H_k)\mathbf{P}(A|H_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{P}(H_i)\mathbf{P}(A|H_i)}, \; k = 1, 2, ..., n.$$

Пример 1. Предприятие дает в среднем 25 % продукции высшего сорта и 65 % продукции первого сорта. Какова вероятность того, что случайно взятое изделие окажется первого или высшего сорта?

Решение. Пусть событие $A = \{$изделие высшего сорта$\}$, а событие $B = \{$изделие первого сорта$\}$. Тогда событие $A + B = \{$изделие высшего **или** первого сорта$\}$. Так как события A и B являются несовместными, то по теореме сложения получим:

$\mathbf{P}(A+B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) = 0,25 + 0,65 = 0,9.$

Пример 2. Найти вероятность совместного поражения цели двумя орудиями, если вероятность поражения цели первым орудием равна 0,8, а вторым — 0,7.

Решение. Пусть событие $A = \{$первое орудие поразило цель$\}$, а событие $B = \{$второе орудие поразило цель$\}$. Тогда событие $A \cdot B = \{$оба орудия поразили цель (первое **и** второе орудие поразили цель)$\}$. Так как события A и B являются независимыми, то по теореме умножения получим: $\mathbf{P}(A \cdot B) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B) = 0,8 \cdot 0,7 = 0,56$.

Пример 3. Имеется электрическая схема, представленная на рис. 1, в которой вероятности отказа узлов B_1, B_2, B_3, B_4 за время T равны 0,2; 0,4; 0,3; 0,1. Электрическая схема выходит из строя, если цепь разомкнута. Определить вероятность нормальной работы схемы за время T.

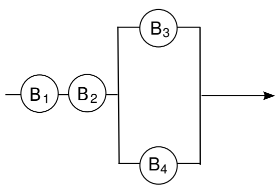

Рис. 1

Решение. Обозначим событие $A_i = \{$отказ элемента $B_i\}$, $i = 1, 2, 3, 4$, $A = \{$безотказная работа схемы$\}$. Вероятности этих событий по условию задачи равны: $\mathbf{P}(A_1) = 0,2$, $\mathbf{P}(A_2) = 0,4$, $\mathbf{P}(A_3) = 0,3$, $\mathbf{P}(A_4) = 0,1$. Событие A равно $\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot (\bar{A}_3 + \bar{A}_4)$.

Тогда

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot (\bar{A}_3 + \bar{A}_4)) = \mathbf{P}(\bar{A}_1)\mathbf{P}(\bar{A}_2)\mathbf{P}(\bar{A}_3 + \bar{A}_4) =$$

$$= \mathbf{P}(\bar{A}_1)\mathbf{P}(\bar{A}_2)(\mathbf{P}(\bar{A}_3) + \mathbf{P}(\bar{A}_4) - \mathbf{P}(\bar{A}_3 \cdot \bar{A}_4)) =$$

$$= \mathbf{P}(\bar{A}_1)\mathbf{P}(\bar{A}_2)(\mathbf{P}(\bar{A}_3) + \mathbf{P}(\bar{A}_4) - \mathbf{P}(\bar{A}_3)\mathbf{P}(\bar{A}_4)) =$$

$$= (1-\mathbf{P}(A_1))(1-\mathbf{P}(A_2))(1-\mathbf{P}(A_3)+1-\mathbf{P}(A_4)-(1-\mathbf{P}(A_3))(1-\mathbf{P}(A_4))) =$$

$$= 0,8 \cdot 0,6 \cdot (0,7 + 0,9 - 0,7 \cdot 0,9) \approx 0,466.$$

Пример 4. Партия электрических лампочек на 25 % изготовлена первым заводом, на 35 % — вторым и на 40 % — третьим. Вероятности выпуска бракованных лампочек соответственно равны 0,03; 0,02 и 0,01. Какова вероятность того, что наудачу взятая лампочка окажется бракованной?

Решение. Обозначим событие $A = \{$лампочка оказалась бракованной$\}$. Вероятность данного события зависит от того, каким заводом она была изготовлена. Пусть гипотеза $H_i = \{$лампочка изготовлена i-м заводом$\}$, $i = 1, 2, 3$. Гипотезы H_1, H_2 и H_3 образуют полную группу событий, $\mathbf{P}(H_1) = 0,25$, $\mathbf{P}(H_2) = 0,35$, $\mathbf{P}(H_3) = 0,4$ $(\mathbf{P}(H_1) + \mathbf{P}(H_2) + \mathbf{P}(H_3) = 1)$.

Условные вероятности равны: $\mathbf{P}(A|H_1) = 0,03$, $\mathbf{P}(A|H_2) = 0,02$ и $\mathbf{P}(A|H_3) = 0,01$. Тогда применим формулу полной вероятности: $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(H_1)\mathbf{P}(A|H_1) + \mathbf{P}(H_2)\mathbf{P}(A|H_2) + \mathbf{P}(H_3)\mathbf{P}(A|H_3) = = 0,25 \cdot 0,03 + 0,35 \cdot 0,02 + 0,4 \cdot 0,01 = 0,0185$.

Пример 5. Из 12 лотерейных билетов 5 выигрышных. Билеты вытягиваются по одному без возвращения. Во второй раз был вытянут выигрышный билет. Какова вероятность того, что и в первый раз был вытянут выигрышный билет?

Решение. Пусть событие $A = \{$во второй раз был вытянут выигрышный билет$\}$. Гипотезы $H_1 = \{$в первый раз был вытянут выигрышный билет$\}$, $H_2 = \{$в первый раз был вытянут невыигрышный билет$\}$. В задаче необходимо найти $\mathbf{P}(H_1|A)$. Будем использовать формулу Байеса. Для этого найдем $\mathbf{P}(H_1) = \dfrac{5}{12}$, $\mathbf{P}(H_2) = \dfrac{7}{12}$; $\mathbf{P}(A|H_1) = \dfrac{4}{11}$, $\mathbf{P}(A|H_2) = \dfrac{5}{11}$. Тогда искомая вероятность равна

$$\mathbf{P}(H_1|A) = \frac{\mathbf{P}(H_1)\mathbf{P}(A|H_1)}{\mathbf{P}(H_1)\mathbf{P}(A|H_1) + \mathbf{P}(H_2)\mathbf{P}(A|H_2)} = \frac{\frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11}}{\frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} + \frac{7}{12} \cdot \frac{5}{11}} = \frac{4}{11}.$$

Задачи

1. Вероятность того, что стрелок при одном выстреле выбьет 10 очков, равна 0,1; 9 очков — 0,3; вероятность выбить 8 и меньше очков — 0,6. Найти вероятность того, что при одном выстреле стрелок выбьет не менее 9 очков.

2. В двух ящиках находятся детали. В первом 10 деталей, из них 3 стандартные, во втором — 15 деталей, из них 6 стандартные. Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что обе детали окажутся стандартными.

3. Студент знает ответы на 20 вопросов из 30. Вопросы задаются последовательно один за другим. Найти вероятность того, что студент знает ответы на два заданных подряд вопроса.

4. В ящике 10 деталей, среди которых 2 нестандартные. Найти вероятность того, что в отобранных наудачу 6 деталях окажется не более одной нестандартной.

5. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 сначала выбирается одна, затем из оставшихся четырех — вторая. Найти вероятность того, что будет выбрана нечетная цифра:

   а) в первый раз;

   б) оба раза.

6. Вероятность поражения цели первым стрелком при одном выстреле равна 0,8, а вторым — 0,6. Найти вероятность того, что цель будет поражена только одним выстрелом.

7. В цехе имеется 3 резервных электродвигателя. Для каждого из них вероятность того, что в данный момент он включен, соответственно равна 0,2; 0,3 и 0,1. Найти вероятность того, что включены:

   а) два электродвигателя;

   б) хотя бы один электродвигатель;

   в) три электродвигателя.

8. На сессии студенту предстоит сдать экзамены по трем предметам. Студент освоил 90 % вопросов по первому предмету, 95 % — по второму и 50 % — по третьему. Какова вероятность того, что студент успешно сдаст все экзамены?

9. Отдел технического контроля проверяет изделия на стандартность. Вероятность того, что изделие нестандартно, равна 0,1. Найти вероятность того, что:

   а) из трех проверенных изделий только одно окажется нестандартным;

   б) нестандартным окажется только четвертое по порядку проверенное изделие.

10. Чему равна вероятность того, что при бросании 3 игральных костей 6 очков появится хотя бы на одной из костей.

11. На рис. 2 изображена электрическая схема, состоящая из 3 элементов. Электрическая схема выходит из строя, если цепь разомкнута. Элементы B_1, B_2, B_3 независимо друг от друга выходят из строя в течение года с вероятностями 0,15; 0,1; 0,2. Найти вероятность безотказной работы схемы в течение года.

12. Имеется электрическая схема (рис. 3), в которой вероятности отказа узлов B_1, B_2, B_3, B_4 за время T равны 0,1; 0,1; 0,5; 0,2. Электрическая схема выходит из строя, если цепь разомкнута. Определить вероятность безотказной работы схемы за время T.

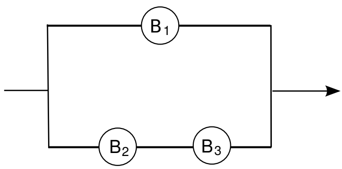

Рис. 2

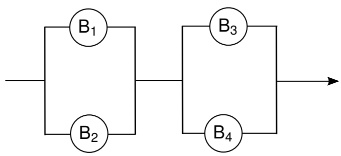

Рис. 3

13. Для сигнализации об аварии установлены 2 независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равна 0,95 для первого сигнализатора и 0,9 — для второго. Найти вероятность того, что при аварии сработает только один сигнализатор.

14. В корзине содержится 10 одинаковых кубиков с номерами от 1 до 10. Наудачу извлекают по одному 3 кубика. Найти вероятность того, что последовательно появятся кубики с номерами 1, 2, 3, если кубики извлекаются:

    а) без возвращения;

    б) с возвращением (извлеченный кубик возвращается в корзину).

15. В пирамиде 5 винтовок, 3 из которых снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,9; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,7.

    а) Найти вероятность того, что мишень будет поражена, если стрелок произведет один выстрел из взятой наудачу винтовки.

    б) Стрелок поразил мишень из взятой наудачу винтовки. Что вероятнее: стрелок стрелял из винтовки с оптическим прицелом или без него?

16. На предприятии установлена система аварийной сигнализации. При возникновении аварийной ситуации звуковой сигнал появляется с вероятностью 0,95. Однако сигнал может возникнуть и без аварийной ситуации с вероятностью 0,001. Реальная вероятность аварийной ситуации равна 0,005.

    а) Найти вероятность того, что сигнализация сработает.

    б) Найти вероятность аварийной ситуации, если сигнализация сработала.

17. Изделие проверяется на стандартность одним из двух специалистов. Вероятность того, что изделие попадет к первому специалисту, равна 0,55, а ко второму — 0,45. Вероятность того, что стандартное изделие будет признано стандартным первым специалистом, равна 0,9, а вторым — 0,98. Найти вероятность признать изделие стандартным.

18. Батарея из 3 орудий произвела залп, причем 2 снаряда попали в цель. Найти вероятность того, что первое орудие дало попадание, если вероятности попадания в цель первым, вторым и третьим орудиями соответственно равны 0,1; 0,3; 0,5.

19. В урне 3 белых и 3 черных шара. Из урны дважды вынимают по одному шару, не возвращая их обратно. Найти вероятность появления белого шара при втором испытании, если при первом испытании был извлечен черный шар.

20. На конвейер поступают детали, произведенные двумя автоматами. Производительность первого автомата вдвое больше производительности второго. Первый автомат производит в среднем 70 % деталей первого сорта, а второй — 80 %. Наудачу взятая с конвейера деталь оказалась первого сорта. Найти вероятность того, что эта деталь произведена первым автоматом.

Ответы

1. 0,4 **2.** 0,12 **3.** 0,437 **4.** 0,667 **5.** а) 0,6; б) 0,3 **6.** 0,44 **7.** а) 0,092; б) 0,496; в) 0,006 **8.** 0,427 **9.** а) 0,243; б) 0,073 **10.** 0,421 **11.** 0,958 **12.** 0,819 **13.** 0,14 **14.** а) 0,0014; б) 0,001 **15.** а) 0,82; б) с оптическим прицелом **16.** а) 0,0057; б) 0,827 **17.** 0,936 **18.** 0,270 **19.** 0,6 **20.** 0,636

1.4. Схема Бернулли. Предельные теоремы для схемы Бернулли

Пусть проводятся n независимых одинаковых испытаний, в каждом из которых может появиться событие A с вероятностью p и не появиться — с вероятностью $q = 1 - p$. Появление события A называется успехом, а непоявление — неудачей. Тогда вероятность того, что в серии из n испытаний событие A появится ровно k раз, вычисляется по **формуле Бернулли**:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

При больших значениях n применение формулы Бернулли становится сложным. В таких случаях применяют приближенные формулы для вычисления вероятностей, которые основаны на локальной и интегральной теоремах Муавра – Лапласа.

Если в схеме Бернулли число испытаний n велико, а вероятность $0 < p < 1$, то для вычисления вероятности $P_n(k)$ можно использовать приближенную формулу, основанную на **локальной теореме Муавра – Лапласа**:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x),$$

где $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}}$.

Обозначим $P_n(k_1 \le k \le k_2)$ вероятность того, что в схеме Бернулли событие A наступило от k_1 до k_2 раз. Тогда, если число испытаний n велико, а вероятность $0 < p < 1$, из **интегральной теоремы Муавра – Лапласа** следует, что

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где $\Phi(x) = \int\limits_0^x \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ — функция Лапласа,
$x_1 = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Значения функций $\varphi(x)$ и $\Phi(x)$ находятся из соответствующих таблиц приложений 1 и 2. При $x > 5$ значение $\Phi(x)$ полагают равным 0,5. При применении этих функций часто пользуются их свойствами:

1) $\varphi(-x) = \varphi(x)$;
2) $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Если в схеме Бернулли n велико, а каждый отдельный успех маловероятен (является редким событием), то для определения вероятности $P_n(k)$ используют **приближение Пуассона**

$$P_n(k) \approx \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, \qquad \text{где } \lambda = np.$$

Пример 1. Вероятность того, что станку в течение рабочего времени потребуется ремонт, равна 0,4. Найти вероятность того, что в течение дня потребуется ремонт: а) двум станкам из четырех; б) трем и более станкам из четырех.

Решение. а) В данной задаче $n = 4$, $k = 2$, $p = 0,4$. По формуле Бернулли, получим: $P_4(2) = C_4^2(0,4)^2(1-0,4)^2 = 0,3456$.

б) Обозначим событие $A = \{$ремонт потребуется трем и более станкам из четырех$\}$. Данное событие можно выразить с помощью более простых событий: $A_1 = \{$ремонт потребуется трем станкам из четырех$\}$ и $A_2 = \{$ремонт потребуется всем четырем станкам$\}$. Так как эти события являются несовместными, то $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A_1 + A_2) = \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) = P_4(3) + P_4(4) = C_4^3(0,4)^3(1 - 0,4)^1 + C_4^4(0,4)^4(1-0,4)^0 = 0,1536 + 0,0256 = 0,1792$.

Пример 2. Вероятность попадания в цель при каждом из 100 независимых выстрелов постоянна и равна 0,8. Найти вероятность того, что число попаданий в цель будет: а) 70; б) не менее 70 и не более 80.

Решение. а) Необходимо найти вероятность $P_{100}(70)$. Применим локальную теорему Муавра – Лапласа: $n = 100$, $k = 70$, $p = 0,8$, $q = 1 - p = 0,2$. Тогда

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = -\frac{10}{4} = -2,5.$$

Используя таблицу из приложения 1, получим: $\varphi(-2,5)=\varphi(2,5)=$ $= 0,0175$. Искомая вероятность равна $P_{100}(70) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x) =$ $= \frac{1}{4} \cdot 0,0175 \approx 0,0044$.

б) Для нахождения искомой вероятности $P_{100}(70 \leq k \leq 80)$ применим интегральную теорему Муавра – Лапласа, где $n = 100$, $k_1 = 70$, $k_2 = 80$, $p = 0,8$, $q = 1 - p = 0,2$. Найдем значения x_1 и x_2:

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = -\frac{10}{4} = -2,5;$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{80 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = 0.$$

Тогда искомая вероятность равна
$P_{100}(70 \leq k \leq 80) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi(0) - \Phi(-2,5) =$ $= \Phi(0) + \Phi(2,5) = 0 + 0,4938 = 0,4938$ (приложение 2).

Пример 3. Микросхема электронного аппарата выходит из строя в течение часа работы с вероятностью 0,004. Найти вероятность того, что в течение 1000 часов работы придется менять микросхему пять раз.

Решение. Так как число испытаний $n = 1000$ велико, а вероятность появления события «микросхема выходит из строя в течение часа работы» в одном испытании мала и равна $p = 0,004$, то можно использовать приближение Пуассона: $k = 5$, $\lambda = np = 1000 \cdot 0{,}004 = 4$. Искомая вероятность равна

$$P_{1000}(5) \approx \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \frac{e^{-4}4^5}{5!} \approx 0,156.$$

Задачи

1. Два шахматиста играют в шахматы. Что вероятнее: выиграть две партии из четырех или три партии из шести (ничьи во внимание не берутся)?

2. Монету бросают 4 раза. Найти вероятность того, что «герб» выпадает:

   а) менее двух раз;

   б) не менее двух раз.

3. В семье пятеро детей. Найти вероятность того, что среди них:

   а) два мальчика;

   б) не более двух мальчиков;

   в) более двух мальчиков;

   г) не менее двух и не более трех мальчиков.

   Вероятность рождения мальчика принять равной 0,51.

4. Пирамидка (1, 2, 3, 4) подбрасывается 4 раза. Какова вероятность того, что не выпадет ни одной четверки?

5. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 1/3. Какова вероятность не менее трех попаданий при 5 выстрелах?

6. Вероятность изготовления дефектной детали равна 0,03. Наудачу взяты 6 деталей. Какова вероятность того, что среди них более четырех деталей без дефектов?

7. Найти вероятность того, что событие A наступит ровно 60 раз в 192 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,25.

8. Вероятность брака изделия на производстве равна 0,1. Найти вероятность того, что при проверке 900 изделий будет ровно 70 бракованных.

9. Вероятность появления события в каждом из 2 400 независимых испытаний равна 0,6. Найти вероятность того, что событие появится:

   а) не менее 1 450 раз и не более 1 500 раз;

   б) не менее 1 450 раз;

   в) не более 1 449 раз.

10. Завод выпускает 70 % изделий первого сорта. Чему равна вероятность того, что в партии из 2 100 изделий число изделий первого сорта будет:

    а) 1 428;

    б) от 1 428 до 1 500?

11. Электронная система состоит из 60 блоков, каждый из которых может отказать в течение года с вероятностью 0,05. Найти вероятность того, что в течение года откажет 2 блока.

12. Сборник содержит 300 задач с ответами. В каждом ответе может быть ошибка с вероятностью 0,01. Какова вероятность того, что ответы в 4 задачах даны с ошибками?

13. Вероятность перегорания энергосберегающей лампы в течение часа работы равна 0,001. Производитель гарантирует, что лампа будет работать 5 000 часов. Какова вероятность перегорания 3 ламп в течение гарантийного срока службы?

Ответы

1. Две партии из четырех **2.** а) 0,313; б) 0,688 **3.** а) 0,306; б) 0,481; в) 0,519; г) 0,624 **4.** 0,004 **5.** 0,210 **6.** 0,988 **7.** 0,009 **8.** 0,004 **9.** а) 0,331; б) 0,337: в) 0,663 **10.** а) 0,003; б) 0,901 **11.** 0,224 **12.** 0,168 **13.** 0,140

1.5. Случайные величины

Случайной величиной $X(\omega)$ называют функцию, отображающую пространство элементарных событий во множество действительных чисел.

В случае бесконечного несчетного множества элементарных событий это определение нуждается в уточнении, связанном с измеримостью функции. Такое определение можно найти в [3], [13].

Случайные величины будем обозначать заглавными буквами X, Y, Z, ...

Законом распредления случайной величины называется любое правило (таблица, функция), позволяющее находить вероятности всех возможных событий, связанных со случайной величиной.

Функцией распределения случайной величины называется функция, определяемая равенством

$$F(x) = \mathbf{P}(X < x).$$

Свойства функции распределения:

1) $0 \le F(x) \le 1$;
2)$F(x)$ — неубывающая;
3)$F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$;
4) $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} F(x) = F(x_0)$.

Вероятность того, что случайная величина X примет значение из промежутка $[a,\, b)$, равна

$$\mathbf{P}(a \le X < b) = F(b) - F(a).$$

Далее будем рассматривать два вида случайных величин: дискретные и непрерывные.

1.6. Дискретные случайные величины

Случайная величина называется **дискретной**, если множество ее значений конечно или счетно.

Законом распределения дискретной случайной величины X называется соотношение между значениями x_i случайной величины и их вероятностями $\mathbf{P}(X = x_i) = p_i$, $i = 1, 2, \ldots$. Отметим, что $\sum\limits_i p_i = 1$.

Многоугольником распределения называют ломаную линию, отрезки которой последовательно соединяют точки с координатами (x_i, p_i) (рис. 4).

Функция распределения дискретной случайной величины (рис. 5) вычисляется по формуле

$$F(x) = \sum_{x_i < x} \mathbf{P}(X = x_i).$$

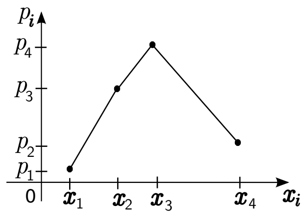

Рис. 4

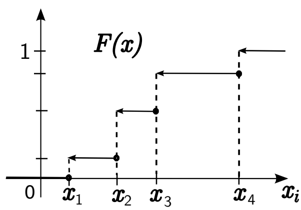

Рис. 5

Операции над случайными величинами

Пусть даны две случайные величины X и Y с законами распределения $p_i = \mathbf{P}(X = x_i)$, $i = 1, \ldots, n$ и $q_i = \mathbf{P}(Y = y_j)$, $j = 1, \ldots, m$ соответственно. Тогда над случайными величинами можно произвести следующие операции:

1) Случайная величина $Z = kX$, где k — постоянная, имеет закон распределения

$$\mathbf{P}(Z = kx_i) = p_i,\ i = 1, \ldots, n.$$

2) Случайная величина $Z = X \pm Y$ принимает значения вида $z_k = x_i \pm y_j$ с вероятностями $s_k = \mathbf{P}(Z = z_k) = \sum\limits_{i,j} p_{ij}$, где

$$p_{ij} = \mathbf{P}((X = x_i) \cdot (Y = y_j)).$$

Две случайные величины называются **независимыми**, если

$$\mathbf{P}((X = x_i) \cdot (Y = y_j)) = \mathbf{P}(X = x_i) \cdot \mathbf{P}(Y = y_j).$$

Для независимых случайных величин X и Y получим:

$$\mathbf{P}(Z = x_i + y_j) = \mathbf{P}((X = x_i) \cdot (Y = y_j)) = \mathbf{P}(X = x_i) \cdot \mathbf{P}(Y = y_j) = p_i q_j.$$

3) Случайная величина $Z = XY$ принимает значения вида $z_k = x_i y_j$ с вероятностями $s_k = \mathbf{P}(Z = z_k) = \sum\limits_{i,j} p_{ij}$, где

$$p_{ij} = \mathbf{P}((X = x_i) \cdot (Y = y_j)).$$

Числовые характеристики дискретных случайных величин

Математическим ожиданием дискретной случайной величины X называется число, которое вычисляется по формуле

$$\mathbf{M}X = \sum_i x_i p_i.$$

Свойства математического ожидания:

1) $\mathbf{M}C = C$, где $C = const$;
2) $\mathbf{M}(CX) = C\mathbf{M}(X)$, где $C = const$;
3) $\mathbf{M}(X \pm Y) = \mathbf{M}(X) \pm \mathbf{M}(Y)$ для любых X и Y;
4) $\mathbf{M}(XY) = \mathbf{M}(X)\mathbf{M}(Y)$, если X и Y независимы.

Дисперсией дискретной случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$\mathbf{D}X = \mathbf{M}(X - \mathbf{M}X)^2 = \sum_i (x_i - \mathbf{M}X)^2 p_i.$$

Для вычисления дисперсии используют более удобную формулу

$$\mathbf{D}X = \mathbf{M}X^2 - (\mathbf{M}X)^2.$$

Свойства дисперсии:

1) $\mathbf{D}C = 0$, где $C = const$;
2) $\mathbf{D}(CX) = C^2\mathbf{D}(X)$, где $C = const$;
3) $\mathbf{D}(X \pm Y) = \mathbf{D}(X) \pm \mathbf{D}(Y)$, если X и Y независимы.

Средним квадратическим отклонением случайной величины называется величина $\sigma X = \sqrt{\mathbf{D}X}$.

Пример 1. В урне 5 белых и 25 черных шаров. Из урны извлекли два шара. Случайная величина X — число вынутых белых шаров.

а) Построить закон распределения;

б) построить многоугольник распределения;

в) найти и построить функцию распределения случайной величины X;

г) найти $\mathbf{P}(0 < X \leq 2)$, $\mathbf{M}X$, $\mathbf{D}X$.

Решение. а) Для построения закона распределения необходимо найти все возможные значения случайной величины и соответствующие вероятности. Число вынутых белых шаров может быть 0, 1 или 2, поэтому случайная величина X принимает значения $X = x_1 = 0$, $X = x_2 = 1$ и $X = x_3 = 2$. Вероятности равны:

$$p_1 = \mathbf{P}(X = 0) = \frac{C_5^0 C_{25}^2}{C_{30}^2} = \frac{60}{87}; \; p_2 = \mathbf{P}(X = 1) = \frac{C_5^1 C_{25}^1}{C_{30}^2} = \frac{25}{87};$$

$$p_3 = \mathbf{P}(X = 1) = \frac{C_5^2 C_{25}^0}{C_{30}^2} = \frac{2}{87}.$$

Составим закон распределения случайной величины X:

X	0	1	2
p_i	$\frac{60}{87}$	$\frac{25}{87}$	$\frac{2}{87}$

Проверим, что для закона распределения выполняется равенство $p_1 + p_2 + p_3 = 1$.

б) Для построения многоугольника распределения необходимо последовательно соединить точки с координатами $(x_i; p_i)$, $i = 1, 2, 3$ (рис. 6).

в) Функция распределения случайной величины X имеет следующий вид:

$$F(x) = \mathbf{P}(X < x) = \sum_{x_i < x} \mathbf{P}(X = x_i) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{60}{87}, & 0 < x \leq 1, \\ \frac{85}{87}, & 1 < x \leq 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

График функции изображен на рис. 7.

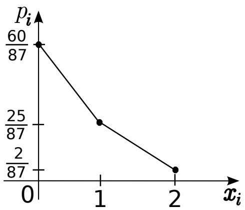

Рис. 6

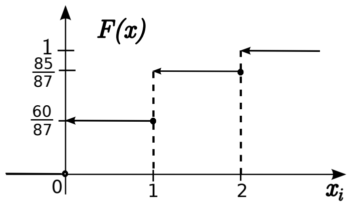

Рис. 7

г) $\mathbf{P}(0 < X \le 2) = \mathbf{P}(X = 1) + \mathbf{P}(X = 2) = \dfrac{25}{87} + \dfrac{2}{87} = \dfrac{27}{87}$;

$\mathbf{M}X = \sum\limits_{i=1}^{3} x_i p_i = 0 \cdot \dfrac{60}{87} + 1 \cdot \dfrac{25}{87} + 2 \cdot \dfrac{2}{87} = \dfrac{1}{3}$;

$\mathbf{D}X = \mathbf{M}X^2 - (\mathbf{M}X)^2 = 0^2 \cdot \dfrac{60}{87} + 1^2 \cdot \dfrac{25}{87} + 2^2 \cdot \dfrac{2}{87} - \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{70}{261}$.

Задачи

1. Дискретная случайная величина X задана законом распределения

X	2	4	5	6
p	0,3	0,1	0,2	0,4

а) Построить многоугольник распределения;

б) найти функцию распределения и построить ее график;

в) найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

2. Дискретная случайная величина X задана законом распределения

X	-2	1	2
p	0,3	0,3	0,4

а) Построить многоугольник распределения;

б) найти функцию распределения и построить ее график;

в) найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

3. Прибор состоит из трех независимо работающих элементов. Каждый элемент может отказать в одном испытании с вероятностью 0,1. Составить закон распределения случайной величины X — число элементов, отказавших в одном испытании.

4. Дискретная случайная величина X задана законом распределения

X	10	12	15	20
p	0,1	0,3	0,4	0,2

Построить многоугольник распределения, найти функцию распределения и построить ее график. Найти $\mathbf{P}(10 < X \leq 15)$.

5. В партии из 10 деталей имеется 8 стандартных. Наудачу отобраны две детали. Составить закон распределения числа стандартных деталей среди отобранных. Построить многоугольник распределения и функцию распределения. Найти вероятность того, что среди отобранных деталей будет не более одной стандартной.

6. Построить закон распределения для случайной величины X, равной числу выпадений очков, кратных 3, при 4 бросаниях игральной кости. Найти $\mathbf{M}X$, $\mathbf{D}X$ и σX.

7. Дискретные независимые случайные величины X и Y заданы законами распределения:

X	1	3
p	0,3	0,7

Y	2	4
p	0,6	0,4

Найти закон распределения случайной величины $Z = X + Y$.

8. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

X	3	6	10
p	0,2	0,1	0,7

Найти закон распределения случайной величины $Z = 2X + 1$.

9. Дискретные независимые случайные величины X и Y заданы законами распределения:

X	10	12	16
p	0,4	0,1	0,5

Y	1	2
p	0,2	0,8

Найти закон распределения случайной величины $Z = X - Y$.

10. Имеется электрическая система с 3 независимо работающими узлами. Вероятности отказа каждого узла в течение месяца равны 0,1; 0,2; 0,3 соответственно. Пусть случайная величина X — число отказавших узлов в течение месяца. Найти закон распределения X, $\mathbf{M}X$ и σX.

11. Пусть случайная величина X — сумма очков при 2 бросаниях игральной кости. Найти ее математическое ожидание и дисперсию.

Ответы

1. в) $\mathbf{M}X = 4,4$; $\mathbf{D}X = 2,84$ **2.** в) $\mathbf{M}X = 0,5$; $\mathbf{D}X = 2,85$

3.

X	0	1	2	3
p	0,729	0,243	0,027	0,001

4. $\mathbf{P}(10 < X \leq 15) = 0,7$

5.

X	0	1	2
p	0,022	0,356	0,622

; $\mathbf{P}(X \leq 1) = 0,378$

6.

X	0	1	2	3	4
p	0,198	0,395	0,296	0,099	0,012

; $\mathbf{M}X = 1,333$; $\mathbf{D}X = 0,889$; $\sigma X = 0,943$

7.

Z	3	5	7
0	0,18	0,54	0,28

8.

X	7	13	21
p	0,2	0,1	0,7

9.

Z	8	9	10	11	14	15
p	0,32	0,08	0,08	0,02	0,40	0,10

10.

Z	0	1	2	3
p	0,504	0,398	0,092	0,006

; $\mathbf{M}X = 0,6$; $\sigma X = 0,678$

11. $\mathbf{M}X = 7$; $\mathbf{D}X = 5,833$

1.7. Непрерывные случайные величины

Плотностью распределения случайной величины называется неотрицательная кусочно-непрерывная функция $f(x)$, для которой выполняется соотношение

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Случайная величина, у которой существует плотность распределения, называется **непрерывной**. Значения непрерывной случайной величины непрерывно заполняют некоторый (конечный или бесконечный) промежуток.

Из определения следует, что

$$f(x) = F'(x).$$

Важным свойством плотности распределения является

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение из отрезка $[a,\, b)$, равна

$$\mathbf{P}(a \le X < b) = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Для непрерывной случайной величины верно равенство

$$\mathbf{P}(a \le X \le b) = \mathbf{P}(a < X \le b) = \mathbf{P}(a < X < b) = \mathbf{P}(a \le X < b).$$

Числовые характеристики непрерывных случайных величин

Математическое ожидание непрерывной случайной величины вычисляется по формуле

$$\mathbf{M}X = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx.$$

Дисперсия непрерывной случайной величины имеет вид

$$\mathbf{D}X = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbf{M}X)^2 f(x)dx.$$

Для вычисления дисперсии, так же, как и для дискретной случайной величины, используют более удобную формулу

$$\mathbf{D}X = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (\mathbf{M}X)^2.$$

Среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины вычисляется по формуле $\sigma X = \sqrt{\mathbf{D}X}$.

Для непрерывных случайных величин свойства математического ожидания и дисперсии аналогичны представленным в п. 1.6.

Пример 1. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2, \\ \dfrac{1}{2}x - 1, & 2 < x \le 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

а) Найти плотность распределения;
б) найти $\mathbf{P}\,(1 < X < 3)$, $\mathbf{M}X$, $\mathbf{D}X$.

Решение. а) Воспользуемся определением плотности распределения вероятностей

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2, \\ \dfrac{1}{2}, & 2 < x \le 4, \\ 0, & x > 4. \end{cases}$$

б) Будем использовать формулу $\mathbf{P}(a < X < b) = \int\limits_a^b f(x)dx$. Искомая вероятность равна

$$\mathbf{P}(1 < X < 3) = \int\limits_1^3 f(x)dx = \int\limits_1^2 0dx + \int\limits_2^3 \frac{1}{2}dx = \frac{1}{2}.$$

Также вероятность можно было найти с помощью формулы

$$\mathbf{P}(a < X < b) = F(b) - F(a) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}.$$

Найдем математическое ожидание и дисперсию случайной величины X:

$$\mathbf{M}X = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int\limits_{2}^{4} x\frac{1}{2}dx = 3;$$

$$\mathbf{D}X = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (\mathbf{M}X)^2 = \int\limits_{2}^{4} x^2\frac{1}{2}dx - (\mathbf{M}X)^2 = \frac{28}{3} - 9 = \frac{1}{3}.$$

Пример 2. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ cx^2, & 0 < x \le 3, \\ 0, & x > 3. \end{cases}$$

Найти: а) постоянную c; б) функцию распределения.

Решение. а) Для нахождения постоянной c воспользуемся свойством плотности $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$. Подставляя в формулу явный вид $f(x)$, получим уравнение $\int\limits_{-\infty}^{0} 0dx + \int\limits_{0}^{3} cx^2dx + \int\limits_{3}^{+\infty} 0dx = 1.$

Отсюда $\int\limits_{0}^{3} cx^2dx = c\frac{x^3}{3}\Big|_0^3 = c\frac{27}{3} = 1$. Значит, $c = \frac{3}{27}$.

б) Согласно определению, $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt.$

Тогда:

1. Для $x \le 0$ получим $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} 0dt = 0$, так как $f(t) = 0$ для $t \le x$.

2. Для $0 < x \le 3$ получим $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} 0dt + \int\limits_{0}^{x} \frac{3}{27}t^2dt = \frac{3}{27}\frac{t^3}{3}\Big|_0^x = \frac{x^3}{27}$, так как $f(t)$ принимает разные значения для $t \le 0$ и $0 < t \le x$.

3. Для $x > 3$ получим $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} 0dt + \int\limits_{0}^{3} \frac{3}{27}t^2dt + \int\limits_{3}^{x} 0dt = \frac{3}{27}\frac{t^3}{3}\Big|_0^3 = 1.$

Таким образом, функция распределения имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \frac{x^3}{27}, & 0 < x \le 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

Задачи

1. Проверить, является ли функцией распределения некоторой случайной величины каждая из следующих функций:

а) $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x, & 0 < x \le 1, \\ 1, & x > 1; \end{cases}$ б) $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x^3, & 0 < x \le 1, \\ 0, & x > 1; \end{cases}$

в) $F(x) = \begin{cases} x, & x \le 0, \\ x^3, & x > 0; \end{cases}$ г) $F(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \le 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$

2. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \dfrac{x}{4}, & 0 < x \le 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

Найти плотность распределения. Найти вероятность того, что X примет значение, заключенное в интервале $(-1; 3)$.

3. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = \sin x$ в интервале $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$, вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти функцию распределения. Найти $\mathbf{P}\left(\dfrac{\pi}{4} < X < \dfrac{\pi}{3}\right)$.

4. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \dfrac{1 - \cos x}{2}, & 0 < x \le \pi, \\ 1, & x > \pi. \end{cases}$$

Найти плотность распределения и $\mathbf{P}\left(0 < X < \dfrac{\pi}{2}\right)$.

5. Проверить, является ли плотностью распределения некоторой случайной величины каждая из следующих функций:

а) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 3x^2, & 0 < x \le 1, \\ 1, & x > 1; \end{cases}$ б) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x^2, & 0 < x \le 1, \\ 0, & x > 1; \end{cases}$

в) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x^3, & x > 0; \end{cases}$ г) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x \in [1, e], \\ 0, & x \notin [1, e]; \end{cases}$

6. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ cx, & 0 < x \le 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

   а) Найти постоянную c;

   б) найти функцию распределения;

   в) найти вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(1; 3)$.

7. Задана плотность распределения случайной величины X

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1, \\ \dfrac{1}{2}(x-1), & 1 < x \le 3, \\ 0, & x > 3. \end{cases}$$

   Найти функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

8. Функция распределения случайной величины X имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \dfrac{1}{16}x^2, & 0 < x \le 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

   Найти математическое ожидание и дисперсию величины X.

9. На отрезок $[0; 2]$ случайным образом бросается точка. Пусть случайная величина X — расстояние от точки до начала координат. Найти функцию распределения X, $\mathbf{M}X$ и $\mathbf{D}X$.

Ответы

2. $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \dfrac{1}{4}, & 0<x\le 4,\\ 0, & x>4;\end{cases}$ $\mathbf{P}(-1<X<3)=0,75$

3. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 1-\cos x, & 0<x\le\dfrac{\pi}{2},\\ 1, & x>\dfrac{\pi}{2};\end{cases}$ $\mathbf{P}\left(\dfrac{\pi}{4}<X<\dfrac{\pi}{3}\right)=(\sqrt{2}-1)/2$

4. $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \dfrac{\sin x}{2}, & 0<x\le\pi,\\ 1, & x>\pi;\end{cases}$ $\mathbf{P}\left(0<X<\dfrac{\pi}{2}\right)=0,5$

6. а) $c=1/2$; б) $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{4}, & 0<x\le 2,\\ 1, & x>2;\end{cases}$ в) $\mathbf{P}(1<X<3)=0,75$

7. $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ \dfrac{1}{4}(x-1)^2, & 1<x\le 3,\\ 1, & x>3;\end{cases}$ $\mathbf{M}X=2,333$; $\mathbf{D}X=0,222$

8. $\mathbf{M}X=2,667$; $\mathbf{D}X=0,889$

9. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \dfrac{x}{2}, & 0<x\le 2,\\ 1, & x>2;\end{cases}$ $\mathbf{M}X=1$; $\mathbf{D}X=0,333$

1.8. Законы распределения случайных величин

Рассмотрим некоторые законы распределения дискретных случайных величин: биномиальный, Пуассона и непрерывных — равномерный, показательный и нормальный.

Биномиальный закон распределения. Пусть проводится n испытаний Бернулли, в результате каждого из которых событие A может появиться с вероятностью p и не появиться с вероятностью $q = 1 - p$. В серии из n испытаний событие A может появиться k раз, $k = 0, 1, ..., n$. Рассмотрим дискретную случайную величину X — число появлений события A в n испытаниях. Случайная величина X имеет следующий закон распределения вероятностей:

x_k	0	1	2	...	k	...	n
p_k	$P_n(0)$	$P_n(1)$	$P_n(2)$	...	$P_n(k)$	...	$P_n(n)$

Вероятности $P_n(k)$ вычисляются по формуле

$$P_n(k) = \mathbf{P}(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Закон распределения дискретной случайной величины, определяемый формулой Бернулли, называется **биномиальным** с параметрами n и p.

Функция биномиального распределения имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \sum\limits_{k<x} C_n^k p^k q^{n-k}, & 0 < x \le n, \\ 1, & n < x; \end{cases}$$

$\mathbf{M}X = np$, $\mathbf{D}X = npq$.

Распределение Пуассона. Дискретная случайная величина X называется распределенной по **закону Пуассона** с параметром λ, если она принимает значения $k = 0$, 1, ..., n с вероятностями

$$p_k = \mathbf{P}(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!},$$

$\mathbf{M}X = \mathbf{D}X = \lambda$.

Распределение Пуассона с параметром $\lambda = np$ является хорошей аппроксимацией биномиального закона распределения при больших значениях n и малых значениях p.

Равномерный закон распределения. Непрерывная случайная величина имеет равномерное распределение на отрезке $[a,\, b]$, если ее плотность имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a,\, b], \\ 0, & x \notin [a,\, b]. \end{cases}$$

Функция распределения определена следующим образом:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & x \in [a,\, b], \\ 1, & x > b; \end{cases}$$

$\mathbf{M}X = \dfrac{a+b}{2}$, $\mathbf{D}X = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

Показательный закон распределения. Непрерывная случайная величина имеет показательное (экспоненциальное) распределение с параметром $\lambda > 0$, если ее плотность распределения имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Функция распределения имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0; \end{cases}$$

$\mathbf{M}X = \dfrac{1}{\lambda}$, $\mathbf{D}X = \dfrac{1}{\lambda^2}$.

Нормальный закон распределения. Нормальный закон распределения наиболее часто встречается на практике.

Непрерывная случайная величина имеет нормальное распределение с параметрами a и σ (записывается $X \sim N(a,\sigma)$), если ее плотность распределения имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Функция распределения имеет вид

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt,$$

$\mathbf{M}X = a$, $\mathbf{D}X = \sigma^2$.

Если $a = 0$ и $\sigma = 1$, то нормальное распределение называют стандартным нормальным. Плотность стандартного нормального распределения имеет вид

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

а функция распределения $F_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$

Значения этих функций находятся из специальных таблиц приложений 1 и 2.

Введенная ранее функция $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ и $F_0(x)$ связаны соотношением

$$F_0(x) = 0,5 + \Phi(x).$$

Тогда значение функции распределения нормальной случайной величины с параметрами a и σ может быть найдено по формуле

$$F(x) = 0,5 + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right).$$

Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины с параметрами a и σ в промежуток (α, β) равна:

$$\mathbf{P}(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$

Вероятность отклонения нормальной случайной величины с параметрами a и σ от своего математического ожидания, т. е. вероятность неравенства $|X-a| < \delta$, равна:

$$\mathbf{P}(|X-a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Если $\frac{\delta}{\sigma} = 3$, то $\mathbf{P}(|X-a| < 3\sigma) = 0,9973$.

Пример 1. Построить закон распределения и функцию распределения числа попаданий мяча в корзину при 3 бросках, если вероятность попадания каждый раз равна 0,8.

Решение. Здесь случайная величина X — число попаданий мяча в корзину при 3 бросках. Так как броски являются независимыми испытаниями, в каждом из которых событие «попасть в корзину» появляется с одинаковой вероятностью, то случайная величина X имеет биномиальное распределение с параметрами $n = 3$, $p = 0,8$.

$\mathbf{P}(X=0) = P_3(0) = C_3^0 (0,8)^0 (0,2)^3 = 0,008,$
$\mathbf{P}(X=1) = P_3(1) = C_3^1 (0,8)^1 (0,2)^2 = 0,096,$

$\mathbf{P}(X=2)=P_3(2)=C_3^2(0,8)^2(0,2)^1=0,384,$
$\mathbf{P}(X=3)=P_3(3)=C_3^3(0,8)^3(0,2)^0=0,512.$

x_k	0	1	2	3
p_k	$P_3(0)=0,008$	$P_3(1)=0,096$	$P_3(2)=0,384$	$P_3(3)=0,512$

Функция распределения случайной величины X имеет следующий вид:

$$F(x)=\sum_{x_i<x}\mathbf{P}(X=x_i)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 0,008, & 0<x\le 1,\\ 0,104, & 1<x\le 2,\\ 0,488, & 2<x\le 3,\\ 1, & x>3.\end{cases}$$

Пример 2. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,02. Сделано 500 выстрелов. Какова вероятность того, что число попаданий в цель будет не меньше 3 и не больше 5?

Решение. Случайная величина X — число попаданий в цель при 500 выстрелах. X имеет биномиальное распределение с параметрами $n=500$ и $p=0,02$. Используя приближение Пуассона с параметром $\lambda=np=10$, получим:

$$\mathbf{P}(3\le X\le 5)=\mathbf{P}(X=3)+\mathbf{P}(X=4)+\mathbf{P}(X=5)=\frac{e^{-10}10^3}{3!}+ +\frac{e^{-10}10^4}{4!}+\frac{e^{-10}10^5}{5!}=0,064.$$

Пример 3. Цена деления шкалы измерительного прибора равна 0,2. Показания прибора округляют до ближайшего числа на шкале. Полагая, что ошибка измерения X распределена по равномерному закону, найти дисперсию $\mathbf{D}X$.

Решение. Воспользуемся формулой для вычисления дисперсии равномерно распределенной на отрезке $[a;b]$ случайной величины X ($a=0$, $b=0,2$): $\mathbf{D}X=\dfrac{(b-a)^2}{12}=\dfrac{(0,2)^2}{12}=\dfrac{1}{300}$.

Пример 4. Производится взвешивание некоторого вещества. Случайные ошибки взвешивания подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением 20 г. Найти вероятность того, что взвешивание будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 5 г.

Решение. Из условия задачи следует, что параметр a нормального закона распределения неизвестен, а $\sigma = 20$. Для определения искомой вероятности воспользуемся формулой

$$\mathbf{P}(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right), \text{ где } \delta = 5,\ \sigma = 20.$$

Получим: $\mathbf{P}(|X - a| < 5) = 2\Phi\left(\dfrac{5}{20}\right) = 2\Phi\left(0,25\right) = 2 \cdot 0,0987 = 0,197.$

Пример 5. Среднее время безотказной работы прибора равно 50 часам. Полагая, что время безотказной работы распределено по показательному закону, найти вероятность того, что в течение 100 часов прибор не выйдет из строя.

Решение. Параметр λ можно найти из соотношения $\mathbf{M}X = \dfrac{1}{\lambda}$. По условию задачи $\mathbf{M}X = 50$, следовательно, $\lambda = 0,02$.

Пусть случайная величина X — время безотказной работы прибора (среднее время между двумя отказами). Тогда искомая вероятность равна $\mathbf{P}(X \geq 100) = 1 - \mathbf{P}(X < 100) = 1 - F(100) = e^{-0,02 \cdot 100} = 0,135$.

Задачи

1. Вероятность сдачи экзамена для каждого из трех студентов равна 0,4. Пусть случайная величина X — число студентов, сдавших экзамен. Составить закон распределения X.

2. На проверку поступают одна за другой детали. Вероятность того, что деталь при проверке окажется нестандартной, равна 0,1. Пусть X — число стандартных деталей после проверки 5 деталей. Найти $\mathbf{M}X$, $\mathbf{D}X$ и σX.

3. Некоторый аппарат состоит из 1000 элементов. Элементы работают независимо друг от друга. Вероятность отказа любого элемента за некоторый промежуток времени равна 0,002. Найти вероятность того, что за этот промежуток времени откажут 3 элемента.

4. Нормально распределенная случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = \dfrac{1}{4\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{32}}$. Найти математическое ожидание и дисперсию X.

5. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины X соответственно равны 10 и 2. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале $(12,\ 14)$.

6. Автомат штампует детали. Контролируется длина детали X, которая распределена нормально с математическим ожиданием (проектная длина), равным 50 мм. Фактически длина изготовленных деталей не менее 32 мм и не более 68 мм. Найти вероятность того, что длина наудачу взятой детали больше 55 мм.

7. Производится измерение диаметра вала без систематических ошибок (одного знака). Случайные ошибки измерения X подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением $\sigma = 10$ мм. Найти вероятность того, что измерение будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 15 мм.

8. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение показательного распределения, заданного при $x \geq 0$:

   а) плотностью $f(x) = 3e^{-3x}$;

   б) функцией распределения $F(x) = 1 - e^{-0{,}2x}$.

9. Завод отправил на базу 500 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0,002. Найти вероятности того, что в пути будет повреждено изделий:

   а) ровно три;

   б) менее трех;

   в) более трех;

   г) хотя бы одно.

10. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины X соответственно равны 20 и 5. Найти вероятность того, что X примет значение, заключенное в интервале $(15,\ 25)$.

11. Магазин получил 1000 бутылок минеральной воды. Вероятность того, что при перевозке бутылка окажется разбитой, равна 0,003. Найти вероятности того, что магазин получит разбитых бутылок:

    а) ровно две,;

    б) менее двух;

    в) не менее двух и не более трех.

12. Пусть X — случайная величина, равномерно распределенная на отрезке [2; 8]. Найти $\mathbf{M}X$, $\mathbf{D}X$ и $\mathbf{P}(3 < X < 5)$.

13. Поезда метро идут с интервалом в 3 минуты. Пассажир в некоторый момент времени выходит на платформу. Время X, в течение которого он будет ожидать поезд, является случайной величиной, распределенной равномерно на промежутке времени [0; 3]. Найти:

    а) $f(x)$;

    б) $\mathbf{M}X$;

    в) $\mathbf{D}X$;

    г) $\mathbf{P}(1 < X < 2)$.

14. Время безотказной работы прибора (в годах) подчинено показательному закону с плотность распределения

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

    а) Найти функцию распределения этой случайной величины;

    б) определить вероятность того, что прибор проработает не более года;

    в) определить вероятность того, что прибор безотказно проработает 3 года;

    г) определить среднее ожидаемое время безотказной работы прибора.

15. Случайная величина X, равная росту взрослого мужчины, распределена нормально со средним значением 175 см и практически измеряется в пределах от 145 до 205 см. Найти вероятность

того, что наудачу выбранный мужчина будет иметь рост от 155 до 185 см?

Ответы

1.

X	0	1	2	3
p	0,216	0,432	0,288	0,064

2. $\mathbf{M}X = 4,5$; $\mathbf{D}X = 0,45$; $\sigma X = 0,671$ **3.** 0,180 **5.** 0,136 **6.** 0,082 **7.** 0,866 **9.** а) 0,061; б) 0,920; в) 0,019; г) 0,632 **10.** 0,683 **11.** а) 0,224; б) 0,199; в) 0,448 **12.** $\mathbf{M}X = 5$, $\mathbf{D}X = 3$ и $\mathbf{P}(3 < X < 5) = 0,333$ **13.** а) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3}, & x \in [0,\ 3], \\ 0, & x \notin [0,\ 3]; \end{cases}$;
б) 1,5; в) 0,75; г) 0,333. **14.** а)$f(x) = \begin{cases} 1 - e^{-2x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$;
б) 0,865; в) 0,002; г) 0,5 **15.** 0,952

2. Математическая статистика

2.1. Статистическое распределение выборки. Эмпирическая функция распределения. Полигон и гистограмма

Математическая статистика — это раздел математики, в котором изучаются методы сбора, систематизации и обработки результатов наблюдений массовых случайных явлений для выявления существующих закономерностей.

Генеральной совокупностью называется общая группа объектов, подлежащих статистическому исследованию.

Выборочной совокупностью (выборкой) называется группа объектов, случайно отобранных из генеральной совокупности.

Число элементов выборки называется ее **объемом**. Пусть из генеральной совокупности случайным образом извлечена выборка объема n. Каждое наблюдаемое в выборке значение x_i, $i = 1, 2, ..., k$ называется **вариантой**.

Частота n_i — число наблюдений значения x_i в выборке.

Относительная частота w_i — отношение частоты n_i к объему выборки: $w_i = \dfrac{n_i}{n}$.

Последовательность вариант, записанных в порядке возрастания, называют **вариационным рядом**, а перечень вариант и соответствующих им частот или относительных частот — **статистическим рядом**:

x_i	x_1	x_2	...	x_k
n_i	n_1	n_2	...	n_k

,

где x_i расположены в порядке возрастания.

Если вариационный ряд состоит из большого количества чисел (или исследуется некоторый непрерывный признак), то используют группированную выборку. Для ее получения диапазон, в котором заключены все наблюдаемые значения признака, называемый размахом $R = x_{max} - x_{min}$, разбивают на m равных частей длиной Δ. Число m частичных интервалов определяется по формуле $m \approx [1 + 3,322 \lg n]$ ($[x]$ — целая часть числа x). Тогда величина каждого частичного интервала равна $\Delta = \dfrac{R}{m}$. При составлении статистического ряда в качестве x_i обычно выбирают середины полученных интервалов u_i, а в качестве n_i — число вариант, попавших в i-й интервал:

Интервал	$[x_{min}, x_{min}+\Delta)$	$[x_{min}+\Delta, x_{min}+2\Delta)$	...	$[x_{max}-\Delta, x_{max})$
Частота	n_1	n_2	...	n_k

Соединив точки с координатами (x_i, n_i) (или (x_i, w_i)) получают **полигон частот (или полигон относительных частот)**.

Эмпирическая функция распределения — это функция, имеющая вид

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n},$$

где n_x — число вариант, меньших x.

Для группированной выборки или интервальных вариационных рядов строится **гистограмма частот (относительных частот)** — ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиной Δ, а высоты равны $\dfrac{n_i}{\Delta}$ $\left(\dfrac{w_i}{\Delta}\right)$. Верхнюю границу гистограммы относительных частот можно рассматривать как статистический аналог плотности распределения наблюдаемой случайной величины (суммарная площадь прямоугольников гистограммы равна единице).

Модой M_0 называется значение признака (варианта), чаще всего встречающееся в изучаемой совокупности. В дискретном ряду распределения модой будет варианта с наибольшей частотой.

Медианой M_e называется варианта, которая находится в середине вариационного ряда. Медиана делит ряд пополам, по обе стороны от нее находится одинаковое количество единиц совокупности.

Для дискретного вариационного ряда с нечетным числом членов медиана равна серединному варианту, а для ряда с четным числом членов — полусумме двух серединных вариантов.

Пример 1. Выборка задана в виде распределения частот:

x_i	1	4	6	8
n_i	5	8	17	20

а) Найти распределение относительных частот;

б) найти эмпирическую функцию распределения;

в) найти моду и медиану.

Решение. а) Объем выборки равен $n = 50$. По определению относительная частота вычисляется по формуле $w_i = n_i/n$, следовательно, распределение относительных частот имеет вид

x_i	1	4	6	8
w_i	0,1	0,16	0,34	0,4

б) Эмпирическая функция распределения имеет вид

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ 0,1, & 1 < x \le 4, \\ 0,26, & 4 < x \le 6, \\ 0,6, & 6 < x \le 8, \\ 1, & x > 8. \end{cases}$$

в) Чаще всего встречается варианта $x_4 = 8$, поэтому она является модой распределения.

Для вычисления медианы распределения необходимо последовательно найти сумму накопленных частот ряда. Это продолжается до получения накопленной суммы частот, превышающей половину суммы частот ряда. В примере сумма частот ряда равна 50, ее половина — 25. Накопленная сумма частот, превышающих 25, равна 30. Варианта, соответствующая этой сумме, $x_3 = 6$, и есть медиана ряда.

x_i	1	4	6	8
n_i	5	8	17	20
Сумма накопленных частот	5	$5+8=13$	$13+17=30$	—

Пример 2. Дана выборка объема $n = 30$:

26; 20; 45; 50; 30; 32; 46; 45; 34; 24; 35; 42; 34; 29; 34; 36; 30; 43; 23; 38; 48; 39; 40; 42; 38; 37; 43; 28; 36; 44.

Сделать интервальную группировку этой выборки. Построить гистограмму относительных частот по данным выборки.

Решение. Размах выборки $R = 50 - 20 = 30$. Количество частичных интервалов равно $m \approx [1 + 3,322 \lg n] = 5$. Ширина интервала равна $\Delta = \dfrac{R}{m} = 6$. Таблица интервальной группировки имеет следующий вид:

Интервал	$[20; 26)$	$[26; 32)$	$[32; 38)$	$[38; 44)$	$[44; 50]$
Середина интервала u_i	23	29	35	41	47
n_i	3	5	8	8	6
w_i	$0,1$	$0,167$	$0,267$	$0,267$	$0,2$
w_i/Δ	$0,017$	$0,028$	$0,044$	$0,044$	$0,033$

Для построения гистограммы необходимо вычислить w_i/Δ для каждого интервала. Гистограмма относительных частот изображена на рис. 8.

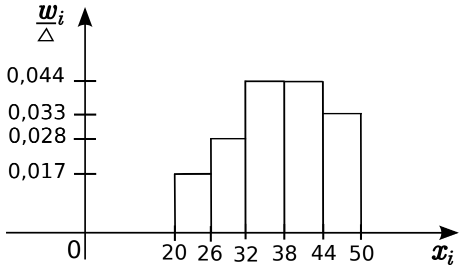

Рис. 8

Задачи

1. Выборка задана в виде распределения частот

x_i	3	5	6	10
n_i	3	5	2	10

а) Найти распределение относительных частот;

б) построить полигон относительных частот;

в) найти эмпирическую функцию распределения по данному распределению выборки и построить ее график.

2. Выборка задана в виде распределения частот

x_i	-1	3	5	8
n_i	1	3	2	4

а) Найти распределение относительных частот;

б) построить полигон относительных частот;

в) найти эмпирическую функцию распределения по данному распределению выборки и построить ее график;

г) найти моду и медиану ряда.

3. Построить гистограмму относительных частот по данному распределению выборки:

Номер интервала	Интервал	Число вариант в интервале
1	(1;5)	10
2	(5;9)	20
3	(9;13)	50
4	(13;17)	12
5	(17;21)	8

4. Построить гистограмму относительных частот по данному распределению выборки:

Номер интервала	Интервал	Число вариант в интервале
1	(10;15)	3
2	(15;20)	5
3	(20;25)	2
4	(25;30)	4
5	(30;35)	4
6	(35;40)	2

5. Дана выборка объема $n = 20$:

45; 30; 20; 35; 30; 35; 40; 35; 40; 30; 20; 30; 45; 40; 45; 30; 35; 45; 30; 35.

а) Найти распределение относительных частот;

б) построить полигон относительных частот;

в) найти эмпирическую функцию распределения по данному распределению выборки и построить ее график;

г) найти моду и медиану ряда.

6. Каждый час измерялось напряжение в электросети. При этом были получены следующие значения (в вольтах):

   220, 219, 226, 214, 230, 223, 220, 222, 233, 219, 222, 221, 227, 218, 226, 209, 213, 215, 208, 221, 216, 222, 219, 225.

   Провести интервальную группировку по выборке. Построить:

   а) гистограмму относительных частот;

   б) эмпирическую функцию распределения;

   в) оценить вероятность того, что напряжение не превосходит 220 В.

7. Приведены данные о количестве поступивших звонков в службу такси за один час:

Временной интервал	$[0;10)$	$[10;\ 20)$	$[20;\ 30)$	$[30;\ 40)$	$[40;\ 50)$	$[50;\ 60]$
Количество звонков	2	5	3	10	4	6

   Построить гистограмму относительных частот по данному распределению выборки.

Ответы

1. в) $F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \le 3, \\ 0,15, & 3 < x \le 5, \\ 0,4, & 5 < x \le 6, \\ 0,5, & 6 < x \le 10, \\ 1, & x > 10 \end{cases}$ **2.** в) $F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1, \\ 0,1, & -1 < x \le 3, \\ 0,4, & 3 < x \le 5, \\ 0,6, & 5 < x \le 8, \\ 1, & x > 8; \end{cases}$

г) M_0=8; $M_e = 5$

5. в) $F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \le 20, \\ 0,1, & 20 < x \le 30, \\ 0,4, & 30 < x \le 35, \\ 0,65, & 35 < x \le 40, \\ 0,8, & 40 < x \le 45, \\ 1, & x > 45; \end{cases}$ г) M_0=30; $M_e = 35$

2.2. Точечные и интервальные оценки параметров распределения

Одной из основных задач математической статистики является задача оценки неизвестного параметра распределения генеральной совокупности по выборке.

Пусть изучается некоторый признак генеральной совокупности (случайная величина X). Параметром распределения θ случайной величины X называется числовая характеристика этой случайной величины (математическое ожидание, дисперсия и т. д.). Требуется по выборке x_1, x_2, ..., x_n, полученной в результате n наблюдений, оценить неизвестный параметр θ.

Точечной оценкой параметра θ называется функция $\tilde{\theta}(x_1, ..., x_n)$, построенная по выборке (ее также называют **статистикой**). Заметим, что оценка $\tilde{\theta}(x_1, ..., x_n)$ является случайной величиной.

Оценку называют **несмещенной**, если $\mathbf{M}\tilde{\theta} = \theta$. В противном случае оценку называют **смещенной**.

Пусть наблюдаются варианты x_1, x_2, ..., x_k с частотами n_1, n_2, ..., n_k соответственно, n — объем выборки.

Приведем некоторые **точечные оценки параметров генеральной совокупности:**

1) **Выборочное среднее** вычисляется по формуле

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} n_i x_i.$$

Выборочное среднее является несмещенной оценкой математического ожидания исследуемого признака.

2) **Выборочная дисперсия** вычисляется по формуле

$$D = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \bar{x})^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2.$$

Она является смещенной оценкой дисперсии исследуемого признака. Поэтому в качестве несмещенной оценки используют исправленную выборочную дисперсию

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2 - n(\bar{x})^2 \right).$$

Интервальные оценки параметров генеральной совокупности

Интервал $(\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2)$, покрывающий с вероятностью γ истинное значение параметра θ, называется **доверительным интервалом**, а вероятность γ — **доверительной вероятностью** (или **надежностью**), т. е. $\mathbf{P}(\tilde{\theta}_1 < \theta < \tilde{\theta}_2) = \gamma$.

Для симметричного интервала $(\tilde{\theta} - \varepsilon, \tilde{\theta} + \varepsilon)$ $\varepsilon > 0$ называется точностью.

Доверительные интервалы для оценки математического ожидания a нормального распределения. Пусть исследуемый признак генеральной совокупности распределен нормально.

1. Интервальной оценкой с надежностью γ математического ожидания a нормально распределенного количественного признака по выборочному среднему значению при известном среднем квадратическом отклонении σ генеральной совокупности служит доверительный интервал

$$\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t < a < \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t,$$

где t удовлетворяет уравнению $\Phi(t) = \dfrac{\gamma}{2}$. Значение t находится из таблицы приложения 2.

2. При неизвестном среднем квадратическом отклонении σ используют интервал

$$\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\alpha,n-1} < a < \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\alpha,n-1},$$

где s — исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение, $t_{\alpha,n-1}$ находится из таблицы приложения 3 по данным α и n, $\alpha = 1 - \gamma$.

Доверительные интервалы для оценки среднего квадратического отклонения σ нормального распределения. Интервальной оценкой с надежностью γ среднего квадратического отклонения σ нормально распределенного количественного признака по исправленному выборочному среднему квадратическому отклонению s генеральной совокупности служит доверительный интервал

$$s(1-q) < \sigma < s(1+q),\ q < 1,$$
$$0 < \sigma < s(1+q),\ q > 1,$$

где значение $q = q_{\gamma,n}$ находится из таблицы приложения 4 по данным γ и n.

Пример 1. В результате шести измерений некоторой физической величины одним прибором получены следующие результаты: 25; 23; 21; 26; 22; 23.

1. Найти несмещенные оценки генерального среднего и генеральной дисперсии измерений.

2. Предполагается, что результаты измерений распределены нормально. Найти границы, в которых с вероятностью $\gamma = 0{,}95$ заключено среднее значение измерений, если:

а) среднее квадратическое отклонение случайных ошибок измерения (точность прибора) равно 2;

б) среднее квадратическое отклонение случайных ошибок измерения неизвестно.

Решение

1. Несмещенной оценкой генерального среднего является

$\bar{x} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{k} n_i x_i = \dfrac{1}{6}(25 + 23 + 21 + 26 + 22 + 23) = 23,333.$

Несмещенной оценкой генеральной дисперсии является

$s^2 = \dfrac{n}{n-1}D = \dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{k} n_i(x_i - \bar{x})^2 =$

$= \dfrac{1}{5}((25-23,333)^2+(23-23,333)^2+(21-23,333)^2+(26-23,333)^2+$

$+ (22 - 23,333)^2 + (23 - 23,333)^2) = 17,333/5 = 3,467.$

2. Найдем интервальные оценки для генерального среднего.

а) Среднее квадратическое отклонение равно $\sigma = 2$. Следовательно, доверительный интервал для среднего значения признака a имеет вид

$$\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}t < a < \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}t,$$

где t определяется из уравнения $\Phi(t) = \dfrac{\gamma}{2}$.

Получим $\Phi(t) = \dfrac{0,95}{2} = 0,475$. Из таблицы приложения 2 находим, что $t = 1,96$ и

$23,333 - \dfrac{2}{\sqrt{6}}1,96 < a < 23,333 + \dfrac{2}{\sqrt{6}}1,96,$

или $21,732 < a < 24,933$.

б) Доверительным интервалом для среднего значения признака a при неизвестном среднем квадратическом отклонении служит интервал

$$\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\gamma,n-1} < a < \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\gamma,n-1}.$$

Здесь $\bar{x} = 23,333$, $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{3,467} = 1,862$, $\alpha = 1 - \gamma = 0,05$. Значение $t_{\alpha,n-1}$ находится из таблицы приложения 3, $t_{\alpha,n-1} = t_{0,05;5} = 2,57$.

Получим доверительный интервал

$$23,333 - \frac{1,862 \cdot 2,57}{\sqrt{6}} < a < 23,333 + \frac{1,862 \cdot 2,57}{\sqrt{6}},$$

или $21,379 < a < 25,287$.

Задачи

1. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема 50:

x_i	2	5	7	10
n_i	16	12	8	14

Найти выборочное среднее и выборочную дисперсию.

2. Найти несмещенные оценки генерального среднего и генеральной дисперсии для выборки

x_i	120	125	127	130
n_i	5	10	8	7

3. Для анализа успеваемости по математике на учебном курсе было проведено тестирование. В выборку попали две студенческие группы A и B численностью 20 и 25 человек соответственно. Результаты тестирования (по 100-балльной шкале) были сгруппированы в интервалы по 20 баллов и представлены в таблице:

Баллы	Группа A	Группа B
[0 – 20]	1	0
(20 – 40]	3	5
(40 – 60]	7	10
(60 – 80]	5	5
(80 – 100]	4	5

Определите группу, где средний балл тестирования выше, а также группу, где разброс результатов меньше.

4. По выборке объема $n = 23$ найдена смещенная оценка $D = 3$ генеральной дисперсии. Найти несмещенную оценку дисперсии генеральной совокупности.

5. В итоге пяти измерений длины стержня одним прибором получены следующие результаты (в мм): 92; 94; 103; 105; 106.

   Найти:

   а) выборочную среднюю длину стержня;

   б) выборочную и исправленную дисперсии ошибок прибора.

6. Даны результаты измерения температуры в течение недели: 10; 12; 11; 15; 13; 9; 11. Найти:

   а) выборочную среднюю температуру;

   б) выборочную и исправленную дисперсии измерений.

7. При помощи вольтметра, точность которого характеризуется средним квадратическим отклонением 0,2 В, произведено 10 измерений напряжения электрической батареи. Найдите 95%-й доверительный интервал для истинного значения напряжения, если среднее арифметическое результатов наблюдений равно $\bar{x} = 50,2$ В. Предполагается, что контролируемый признак имеет нормальный закон распределения.

8. Для определения срока службы электроламп из большой партии было отобрано случайным образом 400 штук. В результате испытаний оказалось, что средний срок службы лампы равен 1 220 часов. Найти границы, в которых с вероятностью $\gamma = 0{,}997$ заключен средний срок службы электролампы во всей партии, если стандартное отклонение равно 35 часам.

9. Дана выборка значений нормально распределенной случайной величины: 3, 4, 4, 5, 3, 6, 6, 5, 6, 2, 5, 3, 5, 5, 5, 7, 6, 8, 4, 6. Найти с доверительной вероятностью $\gamma = 0{,}95$:

   а) интервальную оценку для математического ожидания;

   б) интервальную оценку для среднего квадратического отклонения.

10. Произведено 10 измерений одним прибором некоторой физической величины, причем исправленное среднее квадратическое отклонение случайных ошибок измерения оказалось равным 0,5. Найти точность прибора с надежностью 0,95. Предполагается, что результаты измерений распределены нормально. (Указание: точность прибора характеризуется средним квадратическим отклонением случайных ошибок измерений.)

Ответы

1. $\bar{x} = 5,76$; $D = 9,94$ **2.** $\bar{x} = 125,87$; $D = 10,67$ **5.** а) 100; б) $D = 34$; $s^2 = 42,5$ **6.** а) $\bar{x} = 11,57$; $D = 3,39$; $s^2 = 3,95$ **7.** (50,076; 50,324) **8.** (1214,82; 1225,18) **9.** а) (4,205; 5,594); б) (0,934; 2,032) **10.** (0,175; 0,825)

2.3. Регрессионный анализ

Рассмотрим две случайные величины X и Y. **Регрессией Y на X** называется математическое ожидание случайной величины Y при условии, что $X = x$:

$$\mathbf{M}(Y|X = x) = \varphi(x).$$

График функции $\varphi(x)$ называется **кривой регрессии**.

Если $\varphi(x) = ax + b$, то говорят о **линейной регрессии Y на X**.

По данным выборки можно найти выборочные средние $\bar{x}$, $\bar{y}$ и исправленные выборочные средние квадратические отклонения s_x, s_y.

Тогда оценки для коэффициентов a и b имеют вид

$$\bar{a} = r\frac{s_y}{s_x}, \qquad \bar{b} = \bar{y} - \bar{a}\bar{x},$$

где r — **выборочный коэффициент корреляции**, который вычисляется по формуле

$$r = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \sum\limits_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}}.$$

Выборочный коэффициент корреляции $-1 \leq r \leq 1$. Он отражает степень линейной зависимости Y от X.

Пример 1. Десять раз при различных значениях признака X было измерено значение признака Y. Получены следующие результаты:

X	2	2,8	3	3,1	3,5	3,9	4,1	4,4	4,6	5,1
Y	3,9	7,8	9,3	9,8	11,1	13,1	14	16,3	17,1	19,4

Найти уравнение регрессии Y на X: $y = ax + b$.

Решение. Все вычисления удобно производить в таблице.

Для нахождения коэффициентов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ найдем все суммы (последняя строка таблицы).

$\bar{x} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 36,5/10 = 3,65,\ \bar{y} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} y_i = 121,8/10 = 12,18.$

Тогда $r = \dfrac{40,01}{\sqrt{8,025 \cdot 200,336}} = 0,9978;$

$s_x = \sqrt{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{0,8025} = 0,8958;$

$s_y = \sqrt{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2} = \sqrt{20,0336} = 4,4758.$

Коэффициенты регрессии:

$\bar{a} = r\dfrac{s_y}{s_x} = 0,9978\dfrac{4,4758}{0,8958} = 4,9856;$

$\bar{b} = \bar{y} - \bar{a}\bar{x} = 12,18 - 4,9854 \cdot 3,65 = -6,0176.$

Таким образом, уравнение регрессии имеет вид
$y = 4,9856x - 6,0176.$

i	x_i	y_i	$x_i - \bar{x}$	$y_i - \bar{y}$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$
1	2	3,9	-1,65	-8,28	13,662	2,7225	68,5584
2	2,8	7,8	-0,85	-4,38	3,723	0,7225	19,1844
3	3	9,3	-0,65	-2,88	1,872	0,4225	8,2944
4	3,1	9,8	-0,55	-2,38	1,309	0,3025	5,6644
5	3,5	11,1	-0,15	-1,08	0,162	0,0225	1,1664
6	3,9	13,1	0,25	0,92	0,23	0,0625	0,8464
7	4,1	14	0,45	1,82	0,819	0,2025	3,3124
8	4,4	16,3	0,75	4,12	3,09	0,5625	16,9744
9	4,6	17,1	0,95	4,92	4,674	0,9025	24,2064
10	5,1	19,4	1,45	7,22	10,469	2,1025	52,1284
$\sum$	36,5	121,8			40,01	8,025	200,336

Задачи

1. При исследовании зависимости между случайными величинами X и Y была получена следующая таблица измерений соответствующих значений этих величин:

X	1	3	8	11	13	18	20	21
Y	1	15	50	100	90	110	150	152

Построить уравнение линейной регрессии Y на X.

2. При исследовании зависимости между случайными величинами X и Y была получена следующая таблица измерений соответствующих значений этих величин:

X	3	4	6	7	9	11	13	16	19	20
Y	1,1	2,9	6,9	9,1	12,8	16,8	21	27,2	32,7	35

Построить уравнение линейной регрессии Y на X.

3. Зависимость признака Y от признака X характеризуется таблицей:

X	0,1	0,3	0,6	0,8	1,3	1,7	1,9	2,1	2,3	2,6
Y	2,2	2,9	3,7	4,5	6	7,1	7,6	8,3	9	10

Построить уравнение линейной регрессии Y на X.

Ответы

1. $y = 7,37x - 4,05$ **2.** $y = 2x - 5,01$ **3.** $y = 3,06x + 1,94$

2.4. Проверка статистических гипотез

Статистической гипотезой называется предположение относительно вида неизвестного распределения или неизвестных параметров известного распределения случайной величины.

Проверяемая гипотеза H_0 называется **нулевой** гипотезой. **Альтернативной** называют гипотезу H_1, противоречащую нулевой.

Правило, согласно которому принимается или отклоняется гипотеза H_0, называется **статистическим критерием**.

Проверка статистической гипотезы состоит в том, что по имеющейся выборке вычисляется значение некоторой случайной величины T, называемой **статистикой**, точное или приближенное распределение которой известно. Затем по этому распределению определяется критическое значение $T_{\text{кр}}$, разбивающее все множество значений статистики критерия на два непересекающихся подмножества: **критическую область** (область отклонения гипотезы H_0) и **область допустимых значений** (область принятия гипотезы H_0).

При проверке правильности выдвинутой нулевой гипотезы могут быть допущены ошибки двух видов: 1) **ошибка первого рода**, состоящая в том, что будет отвергнута правильная нулевая гипотеза; 2) **ошибка второго рода**, заключающаяся в том, что будет принята неправильная нулевая гипотеза.

Вероятность ошибки первого рода называется **уровнем значимости критерия** и обозначается через α. Уровень значимости α определяет размер критической области.

Вероятность ошибки второго рода обозначается через β.

Проверка статистических гипотез основывается на принципе, в соответствии с которым принимаются события, имеющие большую вероятность, и отвергаются имеющие малую вероятность.

Различают разные виды критических областей:

1) **правостороннюю критическую область**, определяемую неравенством $T > T_{\text{кр}}$ ($T_{\text{кр}} > 0$) (рис. 9);

2) **левостороннюю критическую область**, определяемую неравенством $T < T_{\text{кр}}$ ($T_{\text{кр}} < 0$) (рис. 10);

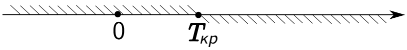

Рис. 9

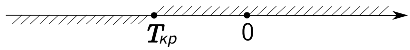

Рис. 10

3) **двустороннюю критическую область**, определяемую неравенством $T_1 < T < T_2$ $(T_2 > T_1)$ (рис. 11).

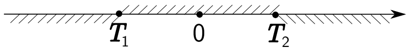

Рис. 11

Таким образом, проверка статистических гипотез может быть разбита на следующие основные этапы:

1) формулировка проверяемой (H_0) и альтернативной (H_1) гипотез;

2) выбор уровня значимости α (стандартные значения α: 0,1; 0,05; 0,01);

3) выбор статистики критерия T (тип критерия);

4) вычисление эмпирического (наблюдаемого) значения T^* выбранной статистики;

5) определение критических значений статистики $T_{\text{кр}}$, найденных по соответствующим таблицам;

6) принятие решения в зависимости от того, в какую область попадает вычисленное по выборке значение статистики T^* (сравнение табличных и вычисленных значений статистики критерия).

Мощностью критерия называют вероятность попадания критерия в критическую область при условии, что верна альтернативная гипотеза; эта вероятность равна $1 - \beta$.

После выбора уровня значимости следует строить критическую область так, чтобы мощность критерия была максимальной.

Проверка гипотезы о математическом ожидании a нормально распределенной генеральной совокупности. Пусть имеем следующую нулевую гипотезу $H_0 : a = a_0$
и одну из альтернативных:

1) H_1: $a > a_0$ (правосторонняя критическая область);

2) H_1: $a < a_0$ (левосторонняя критическая область);

3) H_1: $a \neq a_0$ (двусторонняя критическая область).

Если **известно среднее квадратическое отклонение** σ, то в качестве статистики берется

$$T = \frac{(\bar{x} - a_0)\sqrt{n}}{\sigma}.$$

В каждом случае необходимо по выборке вычислить значение $T^* = \dfrac{(\bar{x} - a_0)\sqrt{n}}{\sigma}$ и сравнить его с $T_{\text{кр}}$.

Соотношения, по которым может быть найдена $T_{\text{кр}}$, а также условия для принятия нулевой гипотезы представлены в таблице:

Тип альтернативной гипотезы	Определение $T_{\text{кр}}$	Гипотеза H_0 принимается	Гипотеза H_0 отвергается
1) $H_1\colon a > a_0$	$\Phi(T_{\text{кр}}) = \frac{1}{2} - \alpha$	$T^* < T_{\text{кр}}$ (см. рис. 9)	$T^* > T_{\text{кр}}$
2) $H_1\colon a < a_0$	$\Phi(T_{\text{кр}}) = \frac{1}{2} - \alpha$	$T^* > -T_{\text{кр}}$ (см. рис. 10)	$T^* < -T_{\text{кр}}$
3) $H_1\colon a \neq a_0$	$\Phi(T_{\text{кр}}) = \frac{1-\alpha}{2}$	$\lvert T^*\rvert < T_{\text{кр}}$ (см. рис. 11)	$\lvert T^*\rvert > T_{\text{кр}}$

Если **среднее квадратическое отклонение неизвестно**, то статистика критерия T имеет распределение Стьюдента с $n-1$ степенями свободы:

$$T = \frac{(\bar{x} - a_0)\sqrt{n}}{s},$$

где s — исправленное среднее квадратическое отклонение.

Критическая точка $T_{\text{кр}} = t_{\alpha, n-1}$ находится из таблицы приложения 3.

Для проверки гипотезы H_1: $a > a_0$ необходимо по выборке вычислить значение T^*. Если $T^* < T_{\text{кр}}$, то гипотеза H_0 принимается, в противном случае отвергается.

Аналогично проверяются гипотезы для случаев 2) и 3).

Проверка гипотезы о нормальном распределении. Пусть имеется генеральная совокупность X, из которой извлечена выборка объема n. По данным выборки вычисляются выборочное среднее $\bar{x}$ и выборочное среднее квадратическое отклонение σ. Диапазон значений разбивается на k интервалов и подсчитывается число выборочных значений n_i, попавших в i-й интервал.

Вычисляются теоретические вероятности p_i того, что значение случайной величины принадлежит i-му интервалу, по формуле

$$p_i = \mathbf{P}(a_i < X < b_i) = \Phi\left(\frac{b_i - \bar{x}}{s}\right) - \Phi\left(\frac{a_i - \bar{x}}{s}\right),$$

где a_i и b_i — границы i-го интервала.

Необходимо проверить гипотезу H_0: генеральная совокупность распределена нормально при заданном уровне значимости α. Для этого используется критерий Пирсона (критерий χ^2)

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}.$$

По данным выборки находится $(\chi^2)^*$ и сравнивается с критическим значением $\chi^2(\alpha, l)$, $l = k - 3$. Если $(\chi^2)^* < \chi^2(\alpha, l)$, то гипотезу H_0 принимают, в противном случае отвергают. Значение $\chi^2(\alpha, l)$ находится по таблице приложения 5.

Пример 1. Из нормальной генеральной совокупности с известной дисперсией $\sigma^2 = 25$ извлечена выборка объема $n = 30$, и по ней найдено выборочное среднее $\bar{x} = 12$. При уровне значимости $\alpha = 0,05$ проверить нулевую гипотезу о том, что математическое ожидание a соответствующей генеральной совокупности равно 10. Рассмотреть все возможные альтернативные гипотезы.

Решение. Необходимо проверить гипотезу H_0: $a = 10$. Рассмотрим три вида альтернативных гипотез:

1) H_1: $a > 10$; 2) H_1: $a < 10$; 3) H_1: $a \neq 10$.

1) Найдем по выборке значение $T^* = \dfrac{(\bar{x} - a_0)\sqrt{n}}{\sigma} = \dfrac{(12 - 10)\sqrt{30}}{5} =$ $= 2,191$.

Критическая точка $T_{\text{кр}}$ может быть найдена из условия $\Phi(T_{\text{кр}}) = \frac{1}{2} - \alpha = 0,45$ (по таблице приложения 2), следовательно, $T_{\text{кр}} = 1,64$.

Так как $T^* > T_{\text{кр}}$, гипотеза H_0 отвергается и принимается гипотеза H_1.

2) Критическая точка $T_{\text{кр}}$ может быть найдена из того же условия $\Phi(T_{\text{кр}}) = \frac{1}{2} - \alpha = 0,45$, следовательно, $T_{\text{кр}} = 1,64$.

Так как $T^* > -T_{\text{кр}}$, гипотеза H_0 принимается.

3) Критическая точка $T_{\text{кр}}$ может быть найдена из условия $\Phi(T_{\text{кр}}) = \frac{1-\alpha}{2} = 0,475$. Получим: $T_{\text{кр}} = 1,96$.

Так как $|T^*| < T_{\text{кр}}$, гипотеза H_0 принимается.

Пример 2. Имеется генеральная совокупность, из которой извлечена выборка объема $n = 50$:

Интервал	(0;5)	(5;10)	(10;15)	(15;20)	(20;25)	(25;30)
n_i	5	6	11	13	8	7

Проверить гипотезу о том, что генеральная совокупность распределена нормально при уровне значимости $\alpha = 0,05$.

Решение. В качестве вариант возьмем середины интервалов $x_1 = 2,5$; $x_2 = 7,5$; $x_3 = 12,5$; $x_4 = 17,5$; $x_5 = 22,5$; $x_6 = 27,5$. Выборочное среднее равно $\bar{x} = (2,5 \cdot 5 + 7,5 \cdot 6 + 12,5 \cdot 11 + {}$ $+17,5 \cdot 13 + 22,5 \cdot 8 + 27,5 \cdot 7)/50 = 15,9$, выборочное и исправленное средние квадратические отклонения равны $\sigma = 7,44$ и $s = 7,52$. Диапазон значений разбит на $k = 6$ интервалов.

Теоретические вероятности p_i равны

$$p_1 = \Phi\left(\frac{b_1 - \bar{x}}{s}\right) - \Phi(-\infty) = \Phi\left(\frac{5 - 15,9}{7,52}\right) - \Phi(-\infty) =$$

$$= \Phi(-2,114) - \Phi(-\infty) = 0,5 - 0,4332 = 0,0668.$$

Аналогично находятся остальные вероятности: $p_2 = 0,148$, $p_3 = 0,2374$, $p_4 = 0,2532$, $p_5 = 0,1815$, $p_6 = 0,1131$.

Необходимо проверить гипотезу H_0: генеральная совокупность распределена нормально при заданном уровне значимости α. Для этого используется критерий Пирсона (критерий χ^2)

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}.$$

По данным выборки находится $(\chi^2)^* = 1,61$ и сравнивается с критическим значением $\chi^2(0,05;3) = 7,81$. Так как $(\chi^2)^* < \chi^2(\alpha, l)$, гипотезу H_0 принимают.

Задачи

1. Из нормальной генеральной совокупности с известной дисперсией $\sigma = 3,5$ извлечена выборка объема $n = 50$, и по ней найдено выборочное среднее $\bar{x} = 8,3$. Требуется при уровне значимости $\alpha = 0,01$ проверить нулевую гипотезу H_0: $a = 8$ при альтернативной гипотезе:

   1) H_0: $a > 8$;

   2) H_0: $a < 8$;

   3) H_0: $a \neq 8$.

2. Из нормальной генеральной совокупности с известной дисперсией $D = 2,55$ извлечена выборка объема $n = 100$. По данным выборки найдено выборочное среднее $\bar{x} = 4,9$. Требуется при уровне значимости $\alpha = 0,05$ проверить нулевую гипотезу H_0: $a = 5$ при альтернативной гипотезе:

   1) H_0: $a > 5$;

   2) H_0: $a < 5$;

   3) H_0: $a \neq 5$.

3. По выборке объема $n = 30$ из нормальной генеральной совокупности найдено выборочное среднее $\bar{x} = 6,8$ и исправленное среднее квадратическое отклонение $s = 2,5$. Требуется при уровне значимости $\alpha = 0,05$ проверить нулевую гипотезу H_0: $a = 7$ при альтернативной гипотезе:

   1) H_0: $a > 7$;

   2) H_0: $a < 7$;

   3) H_0: $a \neq 7$.

4. По выборке объема $n = 340$ из нормальной генеральной совокупности найдено выборочное среднее $\bar{x} = 7,1$ и исправленная дисперсия $s^2 = 1,44$. Требуется при уровне значимости $\alpha = 0,05$ проверить нулевую гипотезу H_0: $a = 7$ при альтернативной гипотезе:

   1) H_0: $a > 7$;

   2) H_0: $a < 7$;

3) H_0: $a \neq 7$.

5. В таблице даны результаты измерений некоторой физической величины:

Интервал	(200; 250)	(250; 300)	(300; 350)	(350; 400)	(400; 450)	(450; 500)
n_i	4	9	10	14	8	5

Проверить гипотезу о том, что генеральная совокупность распределена нормально при уровне значимости $\alpha = 0,01$.

6. Проведено измерение некоторой физической величины. Результаты измерений представлены в таблице:

Интервал	(50; 60)	(60; 70)	(70; 80)	(80; 90)	(90; 100)	(100; 110)	(110; 120)
n_i	7	13	15	18	13	9	5

Проверить гипотезу о том, что генеральная совокупность распределена нормально при уровне значимости $\alpha = 0,01$.

Список литературы

1. Белько И. В. Теория вероятностей и математическая статистика. Примеры и задачи / И. В. Белько, Г. П. Свирид. — Минск : Новое знание, 2004.

2. Боровков А. А. Математическая статистика / А. А. Боровков. — Москва : Наука, 1984.

3. Боровков А. А. Теория вероятностей / А. А. Боровков. – Москва : Наука, 1986.

4. Бородин А. Н. Элементарный курс теории вероятностей / А. Н. Бородин. — Санкт-Петербург : Лань, 1999.

5. Вентцель Е. С. Задачи и упражнения по теории вероятностей : учебное пособие для студентов втузов / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. — Москва : Академия, 2003.

6. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В. Е. Гмурман. — Москва : Высш. шк., 2003.

7. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике : учебное пособие для студентов вузов / В. Е. Гмурман. — Москва : Высш. шк., 1986.

8. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей / Б. В. Гнеденко. — Москва : Наука, 1988.

9. Гусак А. А. Теория вероятностей : справ. пособие к решению задач / А. А. Гусак, Е. А. Бричикова. — Минск : ТетраСистемс, 2007.

10. Кремер Н. Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для вузов / Н. Ш. Кремер. — Москва : ЮНИТИДАНА, 2004.

11. Манита А. Д. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие / А. Д. Манита. — Москва : Издат. отдел УНЦ ДО, 2001.

12. Письменный Д. Т. Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам / Д. Т. Письменный. — Москва : Айрис-пресс, 2008.

13. Теория вероятностей и математическая статистика. Базовый курс с примерами и задачами : учебное пособие / А. И. Кибзун [и др.]. — Москва : Физматлит, 2002.

Приложения

Приложение 1

Таблица значений функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dt$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3726	0,3712	0,3698
0,4	0,3683	0,3668	0,3652	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0395	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0353	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001

Приложение 2

Таблица значений функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,50	0,1915	1,00	0,3413	1,50	0,4332	2,00	0,4772
0,01	0,0040	0,51	0,1950	1,01	0,3438	1,51	0,4345	2,02	0,4783
0,02	0,0080	0,52	0,1985	1,02	0,3461	1,52	0,4357	2,04	0,4793
0,03	0,0120	0,53	0,2019	1,03	0,3485	1,53	0,4370	2,06	0,4803
0,04	0,0160	0,54	0,2054	1,04	0,3508	1,54	0,4382	2,08	0,4812
0,05	0,0199	0,55	0,2088	1,05	0,3531	1,55	0,4394	2,10	0,4821
0,06	0,0239	0,56	0,2123	1,06	0,3554	1,56	0,4406	2,12	0,4830
0,07	0,0279	0,57	0,2157	1,07	0,3577	1,57	0,4418	2,14	0,4838
0,08	0,0319	0,58	0,2190	1,08	0,3599	1,58	0,4429	2,16	0,4846
0,09	0,0359	0,59	0,2224	1,09	0,3621	1,59	0,4441	2,18	0,4854
0,10	0,0398	0,60	0,2257	1,10	0,3643	1,60	0,4452	2,20	0,4861
0,11	0,0438	0,61	0,2291	1,11	0,3665	1,61	0,4463	2,22	0,4868
0,12	0,0478	0,62	0,2324	1,12	0,3686	1,62	0,4474	2,24	0,4875
0,13	0,0517	0,63	0,2357	1,13	0,3708	1,63	0,4484	2,26	0,4881
0,14	0,0557	0,64	0,2389	1,14	0,3729	1,64	0,4495	2,28	0,4887
0,15	0,0596	0,65	0,2422	1,15	0,3749	1,65	0,4505	2,30	0,4893
0,16	0,0636	0,66	0,2454	1,16	0,3770	1,66	0,4515	2,32	0,4898
0,17	0,0675	0,67	0,2486	1,17	0,3790	1,67	0,4525	2,34	0,4904
0,18	0,0714	0,68	0,2517	1,18	0,3810	1,68	0,4535	2,36	0,4909
0,19	0,0753	0,69	0,2549	1,19	0,3830	1,69	0,4545	2,38	0,4913
0,20	0,0793	0,70	0,2580	1,20	0,3849	1,70	0,4554	2,40	0,4918
0,21	0,0832	0,71	0,2611	1,21	0,3869	1,71	0,4564	2,42	0,4922
0,22	0,0871	0,72	0,2642	1,22	0,3883	1,72	0,4573	2,44	0,4927
0,23	0,0910	0,73	0,2673	1,23	0,3907	1,73	0,4582	2,46	0,4931
0,24	0,0948	0,74	0,2703	1,24	0,3925	1,74	0,4591	2,48	0,4934
0,25	0,0987	0,75	0,2734	1,25	0,3944	1,75	0,4599	2,50	0,4938
0,26	0,1026	0,76	0,2764	1,26	0,3962	1,76	0,4608	2,52	0,4941
0,27	0,1064	0,77	0,2794	1,27	0,3980	1,77	0,4616	2,54	0,4945
0,28	0,1103	0,78	0,2823	1,28	0,3997	1,78	0,4625	2,56	0,4948
0,29	0,1141	0,79	0,2852	1,29	0,4015	1,79	0,4633	2,58	0,4951
0,30	0,1179	0,80	0,2881	1,30	0,4032	1,80	0,4641	2,60	0,4953
0,31	0,1217	0,81	0,2910	1,31	0,4049	1,81	0,4649	2,62	0,4956
0,32	0,1255	0,82	0,2939	1,32	0,4066	1,82	0,4656	2,64	0,4959
0,33	0,1293	0,83	0,2967	1,33	0,4082	1,83	0,4664	2,66	0,4961
0,34	0,1331	0,84	0,2995	1,34	0,4099	1,84	0,4671	2,68	0,4963
0,35	0,1368	0,85	0,3023	1,35	0,4115	1,85	0,4678	2,70	0,4965
0,36	0,1406	0,86	0,3051	1,36	0,4131	1,86	0,4686	2,72	0,4967
0,37	0,1443	0,87	0,3078	1,37	0,4147	1,87	0,4693	2,74	0,4969
0,38	0,1480	0,88	0,3106	1,38	0,4162	1,88	0,4699	2,76	0,4971
0,39	0,1517	0,89	0,3133	1,39	0,4177	1,89	0,4706	2,78	0,4973
0,40	0,1554	0,90	0,3159	1,40	0,4192	1,90	0,4713	2,80	0,4974
0,41	0,1591	0,91	0,3186	1,41	0,4207	1,91	0,4719	2,82	0,4976
0,42	0,1628	0,92	0,3212	1,42	0,4222	1,92	0,4726	2,84	0,4977
0,43	0,1664	0,93	0,3238	1,43	0,4236	1,93	0,4732	2,86	0,4979
0,44	0,1700	0,94	0,3264	1,44	0,4251	1,94	0,4738	2,88	0,4980
0,45	0,1736	0,95	0,3289	1,45	0,4265	1,95	0,4744	2,90	0,4981
0,46	0,1772	0,96	0,3315	1,46	0,4279	1,96	0,4750	2,92	0,4982
0,47	0,1808	0,97	0,3340	1,47	0,4292	1,97	0,4756	2,94	0,4984
0,48	0,1844	0,98	0,3365	1,48	0,4306	1,98	0,4761	2,96	0,4985
0,49	0,1879	0,99	0,3389	1,49	0,4319	1,99	0,4767	2,98	0,4986
								4,0	0,499968

Приложение 3

Критические точки распределения Стьюдента $t_{\alpha,n}$

$n\backslash\ \alpha$	0,1	0,05	0,02	0,01	0,001
1	6,3138	12,7062	318,205	63,6567	636,6192
2	2,9200	4,3027	6,9646	9,9248	31,5991
3	2,3534	3,1824	4,5407	5,8409	12,924
4	2,1318	2,7764	3,7469	4,6041	8,6103
5	2,0150	2,5706	3,3649	4,0321	6,8688
6	1,9432	2,4469	3,1427	3,7074	5,9588
7	1,8946	2,3646	2,9980	3,4995	5,4079
8	1,8595	2,3060	2,8965	3,3554	5,0413
9	1,8331	2,2622	2,8214	3,2498	4,7809
10	1,8125	2,2281	2,7638	3,1693	4,5869
11	1,7959	2,2010	2,7181	3,1058	4,4370
12	1,7823	2,1788	2,6810	3,0545	4,3178
13	1,7709	2,1604	2,6503	3,0123	4,2208
14	1,7613	2,1448	2,6245	2,9768	4,1405
15	1,7531	2,1314	2,6025	2,9467	4,0728
16	1,7459	2,1199	2,5835	2,9208	4,0150
17	1,7396	2,1098	2,5669	2,8982	3,9651
18	1,7341	2,1009	2,5524	2,8784	3,9216
19	1,7291	2,0930	2,5395	2,8609	3,8834
20	1,7247	2,0860	2,5280	2,8453	3,8495
21	1,7207	2,0796	2,5176	2,8314	3,8193
22	1,7171	2,0739	2,5083	2,8188	3,7921
23	1,7139	2,0687	2,4999	2,8073	3,7676
24	1,7109	2,0639	2,4922	2,7969	3,7454
25	1,7081	2,0595	2,4851	2,7874	3,7251
26	1,7056	2,0555	2,4786	2,7787	3,7066
27	1,7033	2,0518	2,4727	2,7707	3,6896
28	1,7011	2,0484	2,4671	2,7633	3,6739
29	1,6991	2,0452	2,4620	2,7564	3,6594
30	1,6973	2,0423	2,4573	2,7500	3,6460
40	1,6839	2,0211	2,4233	2,7045	3,5510
50	1,6759	2,0086	2,4033	2,6778	3,4960
60	1,6706	2,0003	2,3901	2,6603	3,4602
100	1,6602	1,9840	2,3642	2,6259	3,3905
110	1,6588	1,9818	2,3607	2,6213	3,3812
120	1,6577	1,9799	2,3578	2,6174	3,3735
∞	1,6448	1,9600	2,3263	2,5758	3,2905

Приложение 4

Значения $q_{\gamma,n}$

$n\backslash\ \gamma$	0,95	0,99	0,999	$n\backslash\ \gamma$	0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

Приложение 5

Критические точки распределения $\chi^2(\alpha, l)$

$l \backslash \alpha$	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,63490	5,02389	3,84146	0,00393	0,00098	0,00016
2	9,21034	7,37776	5,99146	0,10259	0,05064	0,02010
3	11,34487	9,34840	7,81473	0,35185	0,21580	0,11483
4	13,2767	11,14329	9,48773	0,71072	0,48442	0,29711
5	15,08627	12,8325	11,0705	1,14548	0,83121	0,55430
6	16,81189	14,44938	12,59159	1,63538	1,23734	0,87209
7	18,47531	16,01276	14,06714	2,16735	1,68987	1,23904
8	20,09024	17,53455	15,50731	2,73264	2,17973	1,64650
9	21,66599	19,02277	16,91898	3,32511	2,70039	2,08790
10	23,20925	20,48318	18,30704	3,94030	3,24697	2,55821
11	24,72497	21,92005	19,67514	4,57481	3,81575	3,05348
12	26,21697	23,33666	21,02607	5,22603	4,40379	3,57057
13	27,68825	24,7356	22,36203	5,89186	5,00875	4,10692
14	29,14124	26,11895	23,68479	6,57063	5,62873	4,66043
15	30,57791	27,48839	24,99579	7,26094	6,26214	5,22935
16	31,99993	28,84535	26,29623	7,96165	6,90766	5,81221
17	33,40866	30,19101	27,58711	8,67176	7,56419	6,40776
18	34,80531	31,52638	28,86930	9,39046	8,23075	7,01491
19	36,19087	32,85233	30,14353	10,11701	8,90652	7,63273
20	37,56623	34,16961	31,41043	10,85081	9,59078	8,26040
21	38,93217	35,47888	32,67057	11,59131	10,2829	8,89720
22	40,28936	36,78071	33,92444	12,33801	10,98232	9,54249
23	41,63840	38,07563	35,17246	13,09051	11,68855	10,19572
24	42,97982	39,36408	36,41503	13,84843	12,40115	10,85636
25	44,31410	40,64647	37,65248	14,61141	13,11972	11,52398
26	45,64168	41,92317	38,88514	15,37916	13,84391	12,19815
27	46,96294	43,19451	40,11327	16,15140	14,57338	12,87850
28	48,27824	44,46079	41,33714	16,92788	15,30786	13,56471
29	49,58788	45,72229	42,55697	17,70837	16,04707	14,25645
30	50,89218	46,97924	43,77297	18,49266	16,79077	14,95346

У ч е б н о е и з д а н и е

Ивашко Анна Антоновна

Теория вероятностей и математическая статистика

Учебное пособие для студентов физико-технического факультета

Редактор *Е. Е. Порывакина*
Компьютерная верстка *А. А. Ивашко*

Подписано в печать 30.12.15. Формат 60 × 84 1/16.
Бумага офсетная. Уч.-изд. л. 3,4.
Тираж 150 экз. Изд. № 227

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего образования
ПЕТРОЗАВОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Отпечатано в типографии Издательства ПетрГУ
185910, г. Петрозаводск, пр. Ленина, 33