государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
ПЕТРОЗАВОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Высшая математика

Часть II

Методические указания и контрольные задания
для студентов-заочников инженерных специальностей

Петрозаводск
2008

Рассмотрены и утверждены к печати на заседании
кафедры математического анализа 1 июня 2007 г.

Печатаются по решению редакционно-издательского
совета
Петрозаводского государственного университета

Составители: Н. Ю. Светова, М. М. Кручек

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №4 по теме: «Функции многих переменных, кратные и криволинейные интегралы»

Пример 1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции $u = \arcsin(y/x)$.

Решение. Область определения данной функции состоит из точек плоскости, координаты x и y которых удовлетворяют неравенству $-1 \leqslant \frac{y}{x} \leqslant 1$, равносильному совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 0, \\ -x \leqslant y \leqslant x, \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ x \leqslant y \leqslant -x. \end{cases} \end{array}\right.$$

Построим область определения на плоскости Oxy. Проведем прямые $y = x$ и $y = -x$, ограничивающие искомую область. В полуплоскости $x > 0$ выберем произвольную точку, например $A(1, 0)$. Так как ее координаты $x = 1$, $y = 0$ удовлетворяют неравенству $-x \leqslant y \leqslant x$, то угол, образованный прямыми $y = x$ и $y = -x$, содержащий положительную полуось Ox, является графическим изображением системы неравенств

$$\begin{cases} x > 0, \\ -x \leqslant y \leqslant x. \end{cases}$$

Аналогично, выбрав в полуплоскости $x < 0$ точку $B(-1, 0)$, убеждаемся, что она удовлетворяет системе

$$\begin{cases} x < 0, \\ x \leqslant y \leqslant -x. \end{cases}$$

Следовательно, угол, образованный прямыми $y{=}{-x}$ и $y = x$, содержащий отрицательную полуось Ox (без точки O), является графическим изображением решений последней системы неравенств.

□

Пример 2. Найти дифференциал второго порядка функции $z = 2x^3y - 7xy^2$.

Решение. Применяя правила дифференцирования функции одной переменной, найдем частную производную по x, рассматривая y как постоянную величину:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2y - 7y^2.$$

Аналогично, рассматривая x как величину постоянную, найдем частную производную по y:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3 - 14xy.$$

Далее найдем частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(6x^2y - 7y^2) = 12xy, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -14x;$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(2x^3 - 14xy) = 6x^2 - 14y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 6x^2 - 14y.$$

Подставляя найденные производные в формулу второго дифференциала функции $z(x, y)$ в точке $M(x, y)$

$$d^2z(M) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\,dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dy^2,$$

получим:

$$d^2z(M) = 12xy\,dx^2 + (12x^2 - 28y)\,dxdy - 14x\,dy^2.$$

□

Пример 3. Написать уравнение касательной плоскости к эллипсоиду $x^2+y^2/2+z^2=1$, которая параллельна плоскости $x+y-z=0$.

Решение. Уравнение касательной плоскости к поверхности, заданной уравнением $F(x,y,z)=0$, в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ имеет вид

$$F_x^{'}(M_0)(x-x_0)+F_y^{'}(M_0)(y-y_0)+F_z^{'}(M_0)(z-z_0)=0.$$

Пусть $M_0(x_0,y_0,z_0)$ – точка на поверхности эллипсоида, в которой касательная плоскость параллельна плоскости $x+$ $+y-z=0$. Так как $F(x,y,z)=x^2+y^2/2+z^2-1$, то $F_x^{'}(M_0)=2x_0$, $F_y^{'}(M_0)=y_0$, $F_z^{'}(M_0)=2z_0$, и уравнение касательной плоскости к поверхности эллипсоида в точке M_0 имеет вид

$$2x_0(x-x_0)+y_0(y-y_0)+2z_0(z-z_0)=0.$$

Из условия параллельности плоскостей следует коллинеарность их нормалей $\vec{n}_1(2x_0,y_0,2z_0)$ и $\vec{n}_2(1,1,-1)$ в точке M_0, то есть

$$\frac{2x_0}{1}=\frac{y_0}{1}=\frac{2z_0}{-1}.$$

Так как M_0 лежит на эллипсоиде, то $x_0^2+y_0^2/2+z_0^2=1$. Получили систему трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} 2x_0=y_0, \\ 2z_0=-y_0, \\ x_0^2+y_0^2/2+z_0^2=1. \end{cases}$$

Находим ее решения $M_0^1(1/2,1,-1/2)$ и $M_0^2(-1/2,-1,1/2)$. Подставляя координаты этих точек в уравнение касательной плоскости, получим уравнения двух3 искомых касательных плоскостей, отвечающих условиям задачи:

$$x+y-z-2=0; \quad x+y-z+2=0.$$

$\square$

Пример 4. Определить направление наибольшего роста функции $z = x^2 + xy + 7$ в точке $M_0(1; 1)$.

Решение. Направление наибольшего роста функции в точке M_0 определяется градиентом функции, вычисленным в этой точке, т. е. вектором вида

$$\operatorname{grad} z(M_0) = \frac{\partial z}{\partial x}(M_0)\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}(M_0)\vec{j}.$$

Вычислив частные производные функции z в точке M_0, получим, что $\operatorname{grad} z(M_0) = 3\vec{i} + \vec{j}$. $\square$

1° Локальный экстремум функции. Пусть $u = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$. Говорят, что функция $u = f(x, y)$ имеет в точке M_0 *строгий локальный максимум (минимум)*, если существует такая окрестность точки M_0, в которой при $M \neq M_0$ выполняется неравенство $f(x, y) < f(x_0, y_0)$ $(f(x, y) > f(x_0, y_0))$. Локальный максимум (минимум) называют *локальным экстремумом* или просто *экстремумом.*

Пусть функция $u = f(x, y)$ дифференцируема в M_0. Точка M_0 называется *стационарной точкой* функции $f(x, y)$, если частные производные функции по переменным x и y в M_0 равны нулю. Предположим, что в некоторой окрестности стационарной точки M_0 функция $u = f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Составим матрицу H вторых производных в M_0:

$$H = \begin{pmatrix} u''_{xx}(M_0) & u''_{xy}(M_0) \\ u''_{xy}(M_0) & u''_{yy}(M_0) \end{pmatrix}.$$

Обозначим $\triangle_1$ и $\triangle_2$ следующие главные миноры 1-го и 2-го порядков соответственно:

$$\triangle_1 = u''_{xx}(M_0), \quad \triangle_2 = u''_{xx}(M_0)u''_{yy}(M_0) - (u''_{xy}(M_0))^2.$$

Тогда, если:
1. $\triangle_1 > 0, \triangle_2 > 0$, то M_0 является точкой строгого минимума функции $u = f(x, y)$;
2. $\triangle_1 < 0, \triangle_2 > 0$, то M_0 является точкой строгого максимума функции $u = f(x, y)$;
3. $\triangle_2 < 0$, то M_0 не является точкой экстремума функции $u = f(x, y)$.
В других случаях требуется дополнительное исследование.

Пример 5. Исследовать функцию $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$ на экстремум.

Решение. Функция определена на всей плоскости. Вычислим частные производные по x и y и приравняем их к нулю:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 - 4x + 4y, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 4y^3 + 4x - 4y;$$

$$\begin{cases} 4x^3 - 4x + 4y = 0, \\ 4y^3 + 4x - 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - x + y = 0, \\ y^3 + x - y = 0. \end{cases}$$

Из системы уравнений найдем три стационарные точки: $M_1(0,0)$, $M_2(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $M_3(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Найдем частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 - 4; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12y^2 - 4.$$

В соответствии с достаточными условиями экстремума необходимо вычислить значения $a_{11} = z''_{xx}$, $a_{22} = z''_{yy}$, $a_{12} = z''_{xy}$ и $\triangle = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ в каждой стационарной точке.

В точке $M_1(0,0)$ получим: $a_{11} = -4$, $a_{22} = -4$, $a_{12} = 4$, $\triangle = 0$. В этом случае с помощью достаточных условий нельзя определить наличие экстремума в точке $M_1(0,0)$. Заметим, что $z(0,0) = 0$, но в любой окрестности точки M_1 найдутся как точки, в которых значения функции положительны, так и точки, в которых значения отрицательны. Например,

$z = f(x,y)|_{y=0} = f(x,0) = x^4 - 2x^2 = -x^2(2-x^2) < 0$ при малых x,

$z = f(x,y)|_{y=x} = f(x,x) = 2x^4 > 0$ при $x \neq 0$.

Итак, в точке M_1 функция не имеет экстремума. В точке $M_2(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ имеем $a_{11} = 20 > 0$, $a_{22} = 20$, $a_{12} = 4$, $\triangle = 384 > 0$. Так как $a_{11} > 0$, $\triangle > 0$, то в точке M_2 функция z имеет строгий локальный минимум, равный -8. В точке M_3 исследование проводится аналогично. $\square$

Пример 6. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле

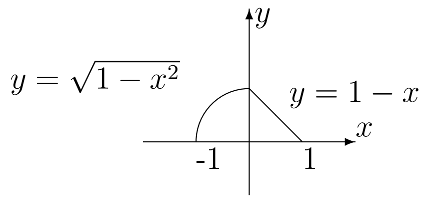
$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)\,dx.$$

Изобразить область интегрирования на плоскости.

Решение. При каждом $y \in [0,1]$ переменная x меняется от $x(y) = -\sqrt{1-y^2}$ до $x(y) = 1-y$. Следовательно, область интегрирования сверху ограничена кривой

$$y(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & x \in [-1,0], \\ 1-x, & x \in (0,1], \end{cases}$$

а снизу прямой $y = 0$ и имеет вид:



Поэтому имеем

$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx = \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy + \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} f(x,y)dy.$$

□

2° Замена переменных в двойном интеграле.

Пример 7. Переходя к полярным координатам, вычислить двойной интеграл $\iint\limits_S (x^2+y^2)\,dxdy$, где область S ограничена окружностью $x^2+y^2=2ax$.

Решение. Положим $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$. Тогда формула замены переменных в двойном интеграле имеет вид:

$$\iint\limits_S f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{S^*} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)r\,drd\varphi.$$

Здесь S^* – образ области S на плоскости $Or\varphi$. Уравнение окружности $x^2+y^2=2ax$ в полярных координатах имеет вид $r=2a\cos\varphi$. Так как $r>0$, то $\varphi\in[-\pi/2,\pi/2]$. Таким образом, S^* – область, ограниченная осью $r=0$, косинусоидой $r = 2a\cos\varphi$ на отрезке $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$. Следовательно,

$$\iint\limits_S (x^2+y^2)\,dxdy = \iint\limits_{S^*} r^3\,drd\varphi = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2a\cos\varphi} r^3\,dr =$$

$$= \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{r^4}{4}\Big|_0^{2a\cos\varphi} \right) d\varphi = \frac{3}{2}\pi a^4.$$

□

3° Вычисление криволинейных интегралов. Пусть кусочно гладкая кривая L задана на координатной плоскости Oxy параметрически уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, и определена непрерывная на кривой L функция $f(x, y)$. Тогда существует *криволинейный интеграл первого рода* $\int\limits_L f(x,y)dl$ и справедлива формула

$$\int\limits_L f(x,y)\,dl = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,dt. \qquad (1)$$

Имеют место следующие утверждения.
1. Если кривая L задана уравнением $y = y(x)$, $x \in [a, b]$, и $y(x)$ имеет непрерывную производную на $[a, b]$, то существует криволинейный интеграл первого рода от $f(x, y)$ вдоль L и справедливо равенство

$$\int\limits_L f(x,y)\,dl = \int\limits_a^b f(x,y(x))\sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx. \qquad (2)$$

2. Если кривая L задана в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$, и $r(\varphi)$ имеет непрерывную произ-

водную на $[\varphi_1, \varphi_2]$, то существует $\int\limits_L f(x,y)\,dl$ и справедливо равенство

$$\int\limits_L f(x,y)\,dl=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(r(\varphi)\cos\varphi, r(\varphi)\sin\varphi)\sqrt{r^2(\varphi)+r'^2(\varphi)}\,d\varphi. \tag{3}$$

Для гладкой пространственной кривой, заданной параметрически уравнениями $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $z=\chi(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$, справедлива формула

$$\int\limits_L f(x,y,z)\,dl=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\chi'^2(t)}\,dt.$$

Пример 8. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_L (x^{4/3}+y^{4/3})\,dl$, где кривая L – астроида $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$.

Решение. Параметрические уравнения астроиды имеют вид: $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$, $t\in[0,2\pi]$. Так как $x'=-3a\cos^2 t\sin t$, $y'=3a\sin^2 t\cos t$, то $x'^2+y'^2=9a^2\cos^2 t\sin^2 t$. Для вычисления криволинейного интеграла применим формулу (1). Получим

$$\int\limits_L (x^{4/3}+y^{4/3})\,dl=\int\limits_0^{2\pi} a^{4/3}(\cos^4 t+\sin^4 t)3a|\cos t\sin t|\,dt=$$

$$=12a^{7/3}\int\limits_0^{\pi/2}(\cos^5 t\sin t+\sin^5 t\cos t)\,dt=$$

$$=12a^{7/3}\left[-\frac{\cos^6 t}{6}\Big|_0^{\pi/2}+\frac{\sin^6 t}{6}\Big|_0^{\pi/2}\right]=4a^{7/3}.$$

□

Если кусочно гладкая кривая AB задана параметрически уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, а функции $P = P(x, y)$ и $Q = Q(x, y)$ кусочно непрерывны вдоль кривой AB, то существует криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy$ и справедлива формула

$$\int\limits_{AB} P dx + Q dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} [P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)] dt. \quad (4)$$

Аналогичное утверждение справедливо для пространственной кривой. Если кривая AB задана уравнением $y = y(x)$, $x \in [a, b]$, и $y(x)$ имеет кусочно непрерывную производную на $[a, b]$, то формула (4) принимает вид:

$$\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{a}^{b} [P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'(x)]\,dx. \quad (5)$$

Если AB – замкнутая кривая, то для нее можно указать два направления обхода от A к B. Если область, лежащая внутри контура, остается слева по отношению к движущейся по контуру точке, то такое направление обхода кривой называют *положительным*, а противоположное ему — *отрицательным.* Криволинейный интеграл второго рода по замкнутому контуру обозначают так: $\oint P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$.

Пример 9. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_{AB} (4x + y)\,dx + (x + 4y)\,dy$, где кривая AB задана уравнением $y = x^4$, $A(1, 1)$, $B(-1, 1)$.

Решение. Вычислим интеграл, пользуясь (5). Учитывая, что $y = x^4$, $dy = 4x^3dx$ и x меняется от 1 до -1, получаем

$$\int\limits_{AB}(4x+y)\,dx+(x+4y)\,dy = \int\limits_{1}^{-1}(4x+x^4+(x+4x^4)4x^3)\,dx = -2.$$

□

Пример 10. Вычислить работу силового поля $\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j}$ при перемещении материальной точки вдоль верхней половины эллипса $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ из точки $A(a, 0)$ в точку $B(-a, 0)$.

Решение. Работа силы $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ при перемещении материальной точки единичной массы из точки A в точку B вдоль кривой AB равна криволинейному интегралу второго рода

$$\int\limits_{AB} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy. \tag{6}$$

Параметрические уравнения верхней половины эллипса можно записать в виде $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $t \in [0, \pi]$. Тогда $dx = -a\sin t\,dt$, $dy = b\cos t\,dt$. Для вычисления интеграла (6) воспользуемся формулой (4). Получим

$$\int\limits_{AB} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \int\limits_{AB} y\,dx - x\,dy = \int\limits_{0}^{\pi}[b\sin t(-a\sin t) -$$

$$-a\cos t(b\cos t)]\,dt = \int\limits_{0}^{\pi}(-ab)\,dt = -\pi ab.$$

□

ВАРИАНТ №1

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции
$$u = \frac{\ln x \ln y}{\sqrt{1-2x-3y}}.$$
2. Найти второй дифференциал функции $z = x\sin^2 y$.
3. Написать уравнения касательных плоскостей к поверхности $x^2+2y^2-3z^2+xy+yz-2xz+16=0$ в точках её пересечения с прямой $\begin{cases} x=1, \\ y=2. \end{cases}$
4. Найти градиент функции $f = \arcsin(z/\sqrt{x^2+y^2})$ в точке $M_0(1,1,1)$.
5. Исследовать функцию $z = xy^2(12-x-y)$, $x>0$, $y>0$ на экстремум.
6. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле $\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{-8x^2}^{-2x+6} f(x,y)\,dy$. Изобразить область интегрирования на плоскости.
7. Переходя к полярным координатам, вычислить двойной интеграл $\iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, где S – круг, ограниченный окружностью $x^2+y^2=2x$.
8. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_C y\,ds$, где C – участок параболы $y^2=4x$ от точки $O(0,0)$ до точки $A(1,2)$.
9. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_C \frac{y}{x}dx + {}$ $+\,dy$, где C – кривая $y=\ln x$, $1 \leqslant x \leqslant e$.
10. Найти работу силы $\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j}$ при перемещении вдоль линии $L: x^2+y^2=1$, $(y \geqslant 0)$, от $M(1,0)$ к $N(-1,0)$.

ВАРИАНТ №2

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции
$$u = \sqrt{3 - 2|x| - |y|}.$$

2. Найти второй дифференциал функции $z = y \ln x$.
3. На поверхности $x^2 + y^2 + z^2 - 6y + 4z = 12$ найти точки, в которых касательная плоскость параллельна плоскости Oxy.
4. Найти градиент функции $f = 3x^4 + y^3 + xy$ в $M_0(1, 2)$.
5. Найти экстремумы функции $z = 3x^2y + y^3 - 12x - 15y + 3$.
6. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-4y-4}^{-8y^3} f(x, y)\, dx$. Изобразить область интегрирования на плоскости.
7. Переходя к полярным координатам, вычислить двойной интеграл $\iint\limits_S \cos\left(\pi\sqrt{x^2 + y^2}\right) dxdy$, где $S = \{x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.
8. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_C \frac{ds}{y - x}$, где C – отрезок с концами $(0, -2)$ и $(4, 0)$.
9. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_C x\, dy - y\, dx$, где C – кривая $y = x^3$, $0 \leqslant x \leqslant 2$.
10. Найти работу силы $\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j}$ при перемещении вдоль линии $L : x^2 + y^2 = 2$ $(y \geqslant 0)$ от точки $M(\sqrt{2}, 0)$ к точке $N(-\sqrt{2}, 0)$.

ВАРИАНТ №3

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции

$$u = \frac{1}{\sqrt{y-\sqrt{x}}}.$$

2. Найти второй дифференциал функции $z = e^{xy}$ в $M(1,-1)$.
3. На поверхности $x^2+y^2-z^2-2x=0$ найти точки, в которых касательная плоскость параллельна плоскости Oxz.
4. Найти градиент функции $f = x^2 - 3yz + 4$ в $M_0(1,2,-1)$.
5. Исследовать на экстремум функцию $z = \dfrac{x+y}{xy} - xy$.
6. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{8x^3}^{4x+4} f(x,y)\,dy$. Изобразить область интегрирования на плоскости.
7. Переходя к полярным координатам, вычислить $\iint\limits_S xy^2\,dxdy$, где $S = \{x^2+y^2 < a^2,\ x \geqslant 0\}$.
8. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_C yds$, по арке циклоиды $x = a(t-\sin t)$, $y = a(1-\cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.
9. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_C 2xy\,dx + x^2\,dy$, где C – дуга параболы $y = x^2/4$, $0 \leqslant x \leqslant 2$.
10. Найти работу силы $\vec{F} = xy\vec{i} + 2y\vec{j}$ при перемещении вдоль линии $L: x^2+y^2=1$, $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0)$, от точки $M(1,0)$ к точке $N(0,1)$.

ВАРИАНТ №4

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции

$$u = \sqrt{y\sin x}.$$

2. Найти второй дифференциал функции $z = (x/y)e^{x^2}$ в точке $M(0,1)$.

3. На поверхности $x^2 + 5y^2 - z^2 - 4xz + 6x - 20y - 2z - 1 = 0$ найти точки, в которых нормаль к поверхности перпендикулярна плоскости Oxz.

4. Найти градиент функции $f = \ln(e^x + e^y + e^z)$ в точке $M_0(0,0,0)$.

5. Исследовать на экстремум функцию $z = (x + y^2)e^{x/2}$.

6. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле $\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{2y-6}^{8y^3} f(x,y)\,dx$. Изобразить область интегрирования на плоскости.

7. Переходя к полярным координатам, вычислить двойной интеграл $\iint\limits_{S} (x+y)\,dxdy$, где $S = \{x^2 + y^2 \leqslant a^2,\ y - x > 0\}$.

8. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_{C} (x+y)ds$ по границе треугольника с вершинами в точках $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$.

9. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_{C} (x^2 - 2xy)\,dx + (y^2 - 2xy)\,dy$ по дуге параболы $y = x^2$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

10. Найти работу силы $\vec{F} = (xy - x)\vec{i} + x^2/2\vec{j}$ при перемещении вдоль линии $L : y = 2\sqrt{x}$ $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0)$ от точки $M(0,0)$ к точке $N(1,2)$.

ВАРИАНТ №5

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции
$$u = \ln(x^2 + 4y^2 - 2x - 3).$$

2. Найти частные производные второго порядка функции $f = x(1 + y^2 z^3)$ в точке $M_0(1, 1, 1)$.
3. Написать уравнения касательных плоскостей к поверхности $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$, которые параллельны плоскости $x - y + 2z = 0$.
4. Найти градиент функции $f = \sin(yz)$ в точке $M_0(0, \pi/4, 1)$.
5. Исследовать на экстремум функцию $z = (x^2 - 2y^2)e^{x-y}$.
6. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле $\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{4x-4}^{8x^3} f(x, y)\, dy$. Изобразить область интегрирования.
7. Переходя к полярным координатам, вычислить $\iint\limits_S y\, dxdy$, где $S = \{x^2 + y^2 \leqslant 2x,\ x > y\}$.
8. Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int\limits_C x^2\, ds$, где C – дуга окружности $x^2 + y^2 = a^2$, $y \geqslant 0$.
9. Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_C (xy - y^2)\, dx + x\, dy$, где C – кривая $y = 2\sqrt{x}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.
10. Найти работу силы $\vec{F} = -y\vec{i} + x\vec{j}$ при перемещении вдоль линии $L : y = x^3$ от точки $M(0, 0)$ к точке $N(2, 8)$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №5 по теме: «Комплексные числа, ряды, дифференциальные уравнения»

1° Комплексные числа. *Комплексным числом* называют упорядоченную пару $z = (x, y)$ действительных чисел x и y. Первое число пары называется *действительной (вещественной) частью* комплексного числа z и обозначается

$x = \operatorname{Re} z$, второе число пары называется *мнимой частью* и обозначается $y = \operatorname{Im} z$. Два комплексных числа $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$ равны тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

Комплексное число $z = (x, y)$ изображается на плоскости Oxy точкой с координатами (x, y).

Суммой двух комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.

Произведением двух комплексных чисел z_1 и z_2 называется число $z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$.

Действительное число x можно рассматривать как комплексное число $x = (x, 0)$. Комплексное число $(0, y)$ при $y \neq 0$ называется *чисто мнимым* и обозначается $z = iy$. Чисто мнимое число $(0, 1)$ называют *мнимой единицей* и обозначают символом i. В силу определения произведения комплексных чисел $i^2 = -1$. Оно позволяет придать прямой алгебраический смысл так называемой *алгебраической форме* записи комплексного числа $z = (x, y) = x + iy$ и производить операции сложения и умножения комплексных чисел по обычным правилам алгебры многочленов.

Комплексное число $\bar{z} = x - iy$ называется *комплексно сопряженным* числу $z = x + iy$.

Деление двух комплексных чисел определяется как действие, обратное умножению, т. е. $z = x + iy$ называется *частным* комплексных чисел z_1 и $z_2 \neq 0$, если $z_1 = z \cdot z_2$. Отсюда следует, что

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \left(\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right).$$

Тригонометрическая форма комплексного числа. Комплексное число $z = x + iy$ определяется упорядоченной парой вещественных чисел (x, y). По формулам $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, связывающим полярные и прямоугольные координаты, получим тригонометрическую форму записи комплексного числа: $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Число $\rho = |z|$ называется *модулем*, а число $\varphi = Argz$ – *аргументом* комплексного числа z, причем аргумент φ определен с точностью до слагаемого $2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$), а модуль имеет значение $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Пусть $z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Тогда умножение и деление комплексных чисел определяется по формулам

$$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]; \tag{7}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]. \tag{8}$$

Для возведения в степень и извлечения корня n-й степени (n – целое положительное число) справедливы формулы

$$z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi); \tag{9}$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \tag{10}$$

$$(k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Пример 1. Вычислить $(\frac{4+i}{1-i})^3$.

Решение. Вычислим сначала частное $4 + i/1 - i$, для этого домножим числитель и знаменатель дроби на число, сопряженное к знаменателю:

$$\left(\frac{4+i}{1-i}\right)^3 = \left(\frac{(4+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}\right)^3 = \left(\frac{3+5i}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}(3^3 + 3\cdot 3^2\cdot 5i +$$
$$+ 3\cdot 3\cdot(5i)^2 + (5i)^3) = \frac{1}{8}(-198 + 10i) = -\frac{99}{4} + \frac{5}{4}i.$$

□

Пример 2. Найти тригонометрическую форму числа $z = \sqrt{3}-i$ и вычислить z^7; найти корни уравнения $w^4+z=0$.

Решение. Для $z = \sqrt{3} - i$ имеем: $x = \sqrt{3}$, $y = -1$, $\rho = \sqrt{x^2+y^2} = 2$, $\cos\varphi = \frac{x}{\rho} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\varphi = \frac{y}{\rho} = -\frac{1}{2}$. Этим значениям косинуса и синуса соответствует значение аргумента $\varphi = -\frac{\pi}{6}$. Следовательно, $z = 2(\cos(-\frac{\pi}{6})+i\sin(-\frac{\pi}{6})) = 2(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6})$.

По формуле (9) получим $z^7 = 2^7(\cos\frac{7\pi}{6} - i\sin\frac{7\pi}{6}) = 128 \times (\cos\frac{7\pi}{6} - i\sin\frac{7\pi}{6})$.

Для уравнения $w^4 = -z$ имеем $-z = 2(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6})$. Следовательно, используя формулу (10), получим $w = \sqrt[4]{-z} = \sqrt[4]{2}(\cos\frac{5\pi/6+2\pi k}{4} + i\sin\frac{5\pi/6+2\pi k}{4})$, $k = 0, 1, 2, 3$. Таким образом, уравнение имеет решения

$$w_1 = \sqrt[4]{2}(\cos\tfrac{5\pi}{24} + i\sin\tfrac{5\pi}{24}), \quad w_2 = \sqrt[4]{2}(\cos\tfrac{17\pi}{24} + i\sin\tfrac{17\pi}{24}),$$
$$w_3 = \sqrt[4]{2}(\cos\tfrac{29\pi}{24} + i\sin\tfrac{29\pi}{24}), \quad w_4 = \sqrt[4]{2}(\cos\tfrac{41\pi}{24} + i\sin\tfrac{41\pi}{24}).$$

□

2° Ряды. Числовой ряд

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{11}$$

называется *сходящимся*, если существует предел его частичных сумм $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. Число $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ называется *суммой* ряда. Если предела частичных сумм не существует, то числовой ряд называется *расходящимся*.

Необходимое условие сходимости. Если ряд (11) сходится, то его общий член стремится к нулю при $n \to \infty$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Достаточные условия сходимости рядов с неотрицательными членами.

Признак сравнения. Пусть даны два ряда с неотрицательными членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ и для всех n выполняется неравенство $a_n \leqslant b_n$. Тогда из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, а из расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Признак Даламбера. Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами и существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = p$. Тогда: 1) при $p < 1$ ряд сходится; 2) при $p > 1$ ряд расходится.

Признак Коши. Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами и существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = p$. Тогда: 1) при $p < 1$ ряд сходится; 2) при $p > 1$ ряд расходится.

Замечание. При $p = 1$ ряд может как сходится, так и расходится. В этом случае необходимо дополнительное исследование ряда с помощью других признаков.

Знакопеременные ряды

Признак Лейбница. Если абсолютные величины членов знакочередующегося ряда $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1} a_n + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$, $(a_n > 0)$ монотонно убывают: $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots$ и общий член ряда стремится к нулю: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд сходится.

Ряд с членами произвольных знаков называется *знакопеременным.*

Знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *условно сходящимся*, если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится, и *абсолютно сходящимся*, если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится.

Степенные ряды.

Ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + \ldots + c_n(x-a)^n + \ldots \quad (12)$$

называется *степенным рядом*, точка a – *центром разложения*, c_n – *коэффициентами ряда*. Число R называется *радиусом сходимости* степенного ряда, если ряд (12) сходится при $|x-a| < R$ и расходится при $|x-a| > R$. При $|x-a| = R$ ряд может как сходиться, так и расходиться. Интервал $(a-R, a+R)$ называется *интервалом сходимости* степенного ряда (12). Радиус сходимости может быть найден по формуле

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|. \quad (13)$$

Степенной ряд внутри интервала сходимости можно почленно дифференцировать и интегрировать.

Рядом Фурье определенной и интегрируемой на $[-l, l]$ функции $f(x)$ называется ряд вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}, \quad (14)$$

где
$$\begin{aligned} a_n &= \tfrac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\tfrac{n\pi x}{l}\,dx,\ n = 0, 1, 2, \ldots, \\ b_n &= \tfrac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\tfrac{n\pi x}{l}\,dx,\ n = 0, 1, 2, \ldots. \end{aligned} \quad (15)$$

Числа a_n, b_n, определенные формулами (15), (16), называются *коэффициентами Фурье*. Если функция, заданная на промежутке $[0, l]$ продолжена четным образом на $[-l, 0)$, то $b_n = 0$ и получается ряд по косинусам:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}.$$

Если же функция, заданная на промежутке $[0, l]$ продолжена нечетным образом на $[-l, 0)$, то $a_n = 0$ и получается ряд по синусам:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Достаточные условия сходимости ряда Фурье функции $f(x)$ к этой функции см., например, в [12].

Пример 3. На отрезке $[-\pi, \pi]$ разложить функцию $f(x) = 2x + 3$ в ряд Фурье.

Решение. Имеем: $a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(2x+3)dx = \frac{1}{\pi}(x^2 + 3x)|_{-\pi}^{\pi} = 6$, $a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(2x+3)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}(2\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\cos nx dx + 3\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx) = \frac{1}{\pi}(\frac{2x}{n}\sin nx|_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin nx dx + \frac{3}{n}\sin nx|_{-\pi}^{\pi}) = \frac{1}{\pi}(\frac{2\pi}{n}\sin \pi n + \frac{2\pi}{n}\sin \pi n + \frac{2}{n^2}\cos nx|_{-\pi}^{\pi} + \frac{3}{n}\sin \pi n + \frac{3}{n}\sin \pi n) = \frac{2}{\pi n^2}(\cos \pi n - \cos \pi n) = 0$.

$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(2x+3)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}(-\frac{2x+3}{n}\cos nx|_{-\pi}^{\pi} + \frac{2}{n}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx) = \frac{1}{\pi}(-\frac{2\pi+3}{n}\cos \pi n + \frac{-2\pi+3}{n}\cos(-\pi n) + \frac{2}{n^2}\sin nx|_{-\pi}^{\pi} = -\frac{4\pi}{\pi n}\cos \pi n = \frac{4(-1)^{n+1}}{n}$.

$$f(x) \sim 3 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{4}{n} \sin nx.$$

□

3° Дифференциальные уравнения первого порядка.

Уравнение вида

$$F(x, y, y') = 0, \tag{16}$$

x – независимая переменная, y является искомой функцией, y' – ее производной, называется *дифференциальным уравнением первого порядка.*

Если уравнение можно разрешить относительно y', то оно принимает вид $y' = f(x, y)$ и называется *уравнением первого порядка, разрешенным относительно производной.*

Общим решением дифференциального уравнения первого порядка называется функция $y = \varphi(x, C)$, которая при любом значении произвольной постоянной C является решением данного уравнения. Решения, получающиеся из общего решения $y = \varphi(x, C)$ при определенном значении произвольной постоянной C, называют *частными.* Задача нахождения частного решения, удовлетворяющего начальным условиям $y = y_0$ при $x = x_0$ называется *задачей Коши.* График решения дифференциального уравнения называется *интегральной кривой.*

Уравнение вида

$$y' = f(x)g(y), \tag{17}$$

где $f(x)$ и $g(y)$ – непрерывные функции, называется дифференциальным уравнением *с разделяющимися переменными.* Пусть $g(y) \neq 0$, $y \in (y_1, y_2)$. Проведем формальное преобразование (разделение переменных):

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\,g(y) \Longrightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx.$$

Переходим к первообразным:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx + C.$$

Под символом $\int dy/g(y)$ понимаем произвольную первообразную функции $1/g(y)$ на интервале $J = (y_1, y_2)$. Аналогично $\int f(x)\,dx$ — первообразная $f(x)$ на $I = (x_1, x_2)$. Произвольная постоянная C отражает тот факт, что у рассматриваемых дифференциальных уравнений бесконечно много решений. Полученное соотношение вида $\Phi(x, y, C) = 0$ уже не является дифференциальным. Далее можно искать явные представления $y = y(x, C)$ или $x = x(y, C)$. Константа C конкретизируется начальными данными $y(x_0) = y_0$.

После получения общего интеграла $\Phi(x, y, C) = 0$ задача теории дифференциальных уравнений считается выполненной, хотя анализ явной связи переменных x, y может оказаться весьма трудоемким.

Если существует y^* такое, что $g(y^*) = 0$, то $y = y^*$ является решением. В областях, где $g(y) \neq 0$, следует использовать описанный выше прием интегрирования.

Пример 1. Решить уравнение $y' = 1 + y^2$. Найти частное решение с начальными данными $y(0) = 1$.

Решение. Разделим переменные:

$$\frac{dy}{dx} = 1 + y^2 \Longrightarrow \frac{dy}{1 + y^2} = dx.$$

Интегрируем:

$$\int \frac{dy}{1 + y^2} = \int dx + C_1 \Longrightarrow \operatorname{arctg} y = x + C,\ \ y = \operatorname{tg}(x + C),$$

где C — произвольная постоянная. Заметим, что при фиксированном C решение $y = \operatorname{tg}(x+C)$ не будет существовать при всех x. Найдем частное решение при условии $y(0) = 1$. Имеем $1 = \operatorname{tg} C$, $C = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. В силу периодичности тангенса можно положить $n = 0$, так что $y = \operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{4})$. Это решение существует на интервале $(-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$. На концах интервала решение обращается в бесконечность, т. е. $y \to \infty$ при $x \to \frac{\pi}{4}$ и $y \to -\infty$ при $x \to -\frac{3\pi}{4}$. Формула $y = \operatorname{tg}(x + C)$ дает все решения (для начальных данных $y(x_0) = y_0$ $C = \operatorname{arctg} y_0 - x_0$), но каждое решение имеет свой интервал существования. □

Уравнение вида

$$y' + p(x)y = f(x), \tag{18}$$

где $p(x)$ и $f(x)$ – непрерывные функции, называется *линейным дифференциальным уравнением первого порядка.* Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение (18) называется *однородным* уравнением, если же $f(x) \not\equiv 0$, то *неоднородным.* Общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения состоит из суммы произвольного частного решения неоднородного уравнения и общего решения соответствующего ему однородного уравнения.

Рассмотрим *метод вариации произвольной постоянной (метод Лагранжа).* Решим сначала однородное уравнение $y' + p(x)y = 0$. Разделим переменные и проинтегрируем:

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx, \quad \int \frac{dy}{y} = -\int p(x)\,dx + C_2,$$
$$\ln|y| = -\int p(x)\,dx + C_1, \quad |y| = e^{C_1} \cdot e^{-\int p(x)dx}.$$

Таким образом, $y = Ce^{-\int p(x)dx}$, $C \neq 0$. При делении на y могли потерять решение $y = 0$. Легко убедиться, что $y = 0$

есть решение. Его можно получить, если положить $C = 0$. Следовательно, формула

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}, \quad C \in \mathbb{R},$$

описывает все решения, а, значит, определяет общее решение линейного однородного уравнения.

Будем искать частное решение неоднородного уравнения в виде

$$y = C(x)\, e^{-\int p(x)dx}.$$

Подставим y в исходное неоднородное уравнение. Тогда

$$\frac{dC}{dx} = b(x)\, e^{\int p(x)dx}, \quad C(x) = C_1 + \int f(x)\, e^{\int p(x)dx}\, dx.$$

Необходимо одно любое частное решение. Поэтому можно положить $C_1 = 0$. Добавляя к полученному частному решению общее решение однородного уравнения, получим общее решение неоднородного уравнения:

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx}\left[C + \int f(x)\, e^{\int p(x)dx}\, dx\right].$$

Произвольная константа $C \in \mathbb{R}$ определяется однозначно начальными условиями $y(x_0) = y_0$.

Пример 4. Решить уравнение $y' - 2xy = 3x^2 - 2x^4$.

Решение. Рассмотрим однородное уравнение $y' - 2xy = 0$. Тогда

$$\frac{dy}{y} = 2xdx, \quad \ln|y| = \int 2x\,dx + C_1, \quad y = Ce^{x^2},\ C \neq 0,\ C \in \mathbb{R}$$

Решение $y = 0$ получается из последней формулы при $C = 0$, поэтому $y = Ce^{x^2}$, $C \in \mathbb{R}$, — общее решение однородного уравнения.

Решение исходного уравнения ищем в виде $y = C(x)e^{x^2}$:

$$C'(x)e^{x^2} + 2xe^{x^2}C(x) - 2xC(x)e^{x^2} = 3x^2 - 2x^4,$$
$$C'(x) = e^{-x^2}(3x^2 - 2x^4),$$
$$C(x) = \int e^{-x^2}(3x^2 - 2x^4)\,dx = x^3e^{-x^2} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Окончательно, $y(x) = (C + x^3e^{-x^2})e^{x^2} = Ce^{x^2} + x^3$. □

4° Линейные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Однородное уравнение. Уравнение вида

$$y'' + py' + qy = 0, \quad p, q \in \mathbb{R}$$

называется *линейным однородным с постоянными коэффициентами.* Запишем характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0. \tag{19}$$

1) Если корни характеристического уравнения (19) различны ($\lambda_1 \neq \lambda_2$) и вещественны ($\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$), то

$$y(x) = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}.$$

Произвольные постоянные C_1, C_2 однозначно определяются начальными условиями $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$, где x_0, y_0, y'_0 — произвольные числа.

2) Если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ — вещественное число, то

$$y(x) = (C_1 + C_2x)e^{\lambda x}.$$

3) Если $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_1 = \alpha - i\beta$ — комплексные, то

$$y(x) = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

Неоднородное уравнение. Уравнение вида

$$y'' + py' + qy = f(x), \quad p, q \in \mathbb{R}$$

называется *линейным неоднородным уравнением с постоянными коэффициентами.* Общее решение неоднородного уравнения определяется как $y = y^0 + y^*$, где y^0 – общее решение однородного уравнения, а y^* – произвольное частное решение неоднородного уравнения. Вид частного решения y^* зависит от структуры правой части уравнения, т. е. функции $f(x)$. В частности, если

$$f(x) = e^{ax}(P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx), \tag{20}$$

где $P_n(x)$, $Q_m(x)$ — многочлены степеней n, m, то решение y^* следует искать в виде

$$y^* = x^r e^{ax}(M_s(x)\cos bx + N_s(x)\sin bx),$$

где r — кратность корня $a+ib$ характеристического уравнения, а $M_s(x)$, $N_s(x)$ — многочлены степени $s = \max\{m, n\}$, записанные с неопределенными коэффициентами. Коэффициенты $M_s(x)$, $N_s(x)$ находятся из тождества, получаемого после подстановки y^* в таком виде в уравнение.

Пример 5. Решить уравнение $y'' - 7y' + 6y = \sin x$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 - 7k + 6 = 0$ имеет корни $k_1 = 1$, $k_2 = 6$, поэтому общее решение соответствующего однородного уравнения — $y^0 = C_1e^x + C_2e^{6x}$.

Частное решение неоднородного уравнения найдем в виде $y^* = A\cos x + B\sin x$, где A и B – неизвестные постоянные коэффициенты. Подставляя y^* в уравнение, получим:

$$-A\cos x - B\sin x + 7A\sin x - 7B\cos x + 6A\cos x + 6B\sin x = \sin x.$$

Приравнивая коэффициенты при $\cos x$ и $\sin x$, получим два уравнения для определения A и B:

$$\begin{cases} -A - 7B + 6A = 0, \\ -B + 7A + 6B = 1, \end{cases}$$

откуда $A = \frac{7}{74}$, $B = \frac{5}{74}$.

Таким образом, общее решение данного уравнения $y = y^0 + y^* = C_1 e^x + C_2 e^{6x} + \frac{7}{74}\cos x + \frac{5}{74}\sin x$. □

Условия к задачам контрольной работы №5

Задача 1. Даны комплексные числа. Необходимо:
а) выполнить действия в алгебраической форме;
б) найти тригонометрическую форму числа z и вычислить z^5; найти корни уравнения $w^3 + z = 0$ и отметить их на комплексной плоскости.

Задача 2. Исследовать сходимость ряда.

Задача 3. Найти область сходимости степенного ряда.

Задача 4. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Фурье в указанном интервале. Построить график данной функции $f(x)$, продолженной с данного интервала периодически на всю числовую ось.
4.1. $f(x) = x + 1$ в интервале $(-\pi, \pi)$.
4.2. $f(x) = x^2 + 1$ в интервале $(-1, 1)$.
4.3. $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ в интервале $(-\pi, \pi)$.
4.4. $f(x) = |x| + 1$ в интервале $(-1, 1)$.
4.5. $f(x) = 2|x|$ в интервале $(-\pi, \pi)$
4.6. $f(x) = x^2$ в интервале $(-\pi, \pi)$.
4.7. $f(x) = 10 - x$ в интервале $(5, 15)$.
4.8. $f(x) = |x|$ в интервале $(-1, 1)$.
4.9. $f(x) = x + \frac{\pi}{2}$ в интервале $(-\pi, \pi)$.
4.10. $f(x) = |\sin x|$ в интервале $(-\pi, \pi)$.

Задача 5-6. Найти общее решение дифференциального уравнения первого порядка.

Задача 7. Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

	Задача 1		**Задача 2**	**Задача 3**
№	а)	б) z		
1.	$\left(\frac{-6+2i}{1+3i}\right)^3$	$-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+5}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+3)x^n}{n(n+2)}$
2.	$\left(\frac{2-8i}{-4-i}\right)^7$	$-1-i$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(3n)!}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n x^n}{(n+2)^2}$
3.	$\left(\frac{3-i}{-2-6i}\right)^3$	$1+\sqrt{3}\,i$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{e^n}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n x^n}{n(n+2)}$
4.	$\left(\frac{-1+4i}{2+\frac{1}{2}i}\right)^2$	$\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n\cdot n!}{n^n}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+1}x^n}{(n+1)!}$
5.	$\left(\frac{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i}{3-i}\right)^3$	$-1+\sqrt{3}\,i$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^n\cdot n!}{n^n}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n x^n}{\sqrt{n(n+1)}}$
6.	$\left(\frac{-\frac{5}{2}+\frac{3}{4}i}{\frac{3}{2}+5i}\right)^2$	$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{2^n\cdot n^n}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 2^n}$
7.	$\left(\frac{-1+\frac{1}{4}i}{\frac{1}{2}+2i}\right)^3$	$\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{n!}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^n}{2n\cdot 4^n}$
8.	$\left(\frac{-2+7i}{\frac{7}{2}+i}\right)^4$	$2-2\sqrt{3}\,i$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^n$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+8)^n}{n^2}$
9.	$\left(\frac{3+i}{2-6i}\right)^7$	$\sqrt{3}-i$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{(n^2+1)^2}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot x^n}{2n-1}$
10.	$\left(\frac{-2-8i}{4-i}\right)^5$	$-2+2\sqrt{3}\,i$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+5)^2}{n!}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n(n+3)}$

№	Задача 5	Задача 6	Задача 7
1.	$(x+1)y'+xy=0$	$xy'-2y=2x^4$	$\begin{cases} y''-5y'+6y=2\cos x \\ y(0)=3 \\ y'(0)=-1/2 \end{cases}$
2.	$y'\sqrt{1-x^2}=1+y^2$	$xy'+y=e^x$	$\begin{cases} y''-3y'+2y=e^{4x} \\ y(0)=1/5 \\ y'(0)=0 \end{cases}$
3.	$y\ln y+xy'=0$	$xy'+y-x-1=0$	$\begin{cases} y''-2y'+y=6e^{-x} \\ y(0)=5/2 \\ y'(0)=0 \end{cases}$
4.	$y'\cos x\ln y=y$	$y'+2xy=xe^{-x^2}$	$\begin{cases} y''-3y'-4y=17\sin x \\ y(0)=4 \\ y'(0)=0 \end{cases}$

5.	$(3+e^x)yy'=e^x$	$xy'+y=x^3$	$\begin{cases} y''-3y'+2y=24e^{-2x} \\ y(0)=0 \\ y'(0)=4 \end{cases}$
6.	$y'\sqrt{1+y^2}=\frac{x^2}{y}$	$y'+xy=x^3y^3$	$\begin{cases} y''-2y'+y=32e^{5x} \\ y(0)=0 \\ y'(0)=2 \end{cases}$
7.	$xyy'=\frac{1+x^2}{1-y^2}$	$y'x+y=-xy^2$	$\begin{cases} y''+2y'-8y=16x+4 \\ y(0)=2 \\ y'(0)=6 \end{cases}$
8.	$(1+y^2)xdx+(1+$ $+x^2)dy=0$	$y'+2y=e^{3x}$	$\begin{cases} y''+3y'-10y=xe^{-2x} \\ y(0)=0 \\ y'(0)=0 \end{cases}$
9.	$2x^2yy'+y^2=2$	$xy'=e^x+xy$	$\begin{cases} y''-4y'+5y=xe^{2x} \\ y(0)=-1 \\ y'(0)=0 \end{cases}$
10.	$y-xy'=3(1+$ $+x^2y')$	$x(x-1)y'+y^3=$ $=xy$	$\begin{cases} y''-4y'+4y=3x-x^2 \\ y(0)=3 \\ y'(0)=4/3 \end{cases}$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №6 по теме: «Элементы теории вероятностей и математической статистики»

1° Классическое определение вероятности. Пусть множество элементарных исходов $\Omega=\{\omega_1,\ldots,\omega_N\}$ случайного эксперимента конечно, а сами исходы равновозможны. Тогда для вычисления вероятности случайного события A можно использовать классическое определение вероятности, согласно которому

$$\mathsf{P}(A) = \frac{M}{N}, \tag{21}$$

где M – число исходов, благоприятствующих событию A, а N – общее число элементарных исходов. Для подсчета чисел M и N часто используют формулы комбинаторики.

Схема выбора, приводящая к сочетаниям. Если опыт состоит в выборе m элементов без возвращения и без упорядочивания из множества, содержащего n элементов, то различными исходами следует считать m-элементные подмножества исходного множества, имеющие различный состав. Их называют *сочетаниями из n элементов по m элементов*, а их общее число определяется по формуле

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!}. \tag{22}$$

Пример 1. Множество E содержит 10 первых букв русского алфавита. Какова вероятность того, что среди трех случайно выбранных букв окажется «а»?

Решение. Элементарным исходом в данном эксперименте является совокупность трех букв. Число всех исходов равно числу трехэлементных подмножеств множества E, т. е. числу сочетаний из десяти элементов по три:

$$N = C_{10}^3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120.$$

Событие $A = \{$среди случайно выбранных трех букв содержится «а»$\}$. Число элементов множества A равно числу всех возможных способов выбрать две буквы из девяти, т. е. C_9^2. Согласно формуле (21)

$$\mathsf{P}(A) = \frac{M}{N} = \frac{C_9^2}{C_{10}^3} = \frac{36}{120} = 0,3.$$

□

Схема выбора, приводящая к размещениям. Если опыт состоит в выборе m элементов из множества, содержащего n элементов, без возвращения, но с упорядочиванием, то различные исходы — m-элементные упорядоченные подмножества исходного множества, отличающиеся либо набором элементов, либо порядком их следования. Они называются *размещениями из n элементов по m элементам*, а их общее число определяется по формуле

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n(n-1)\dots(n-m+1). \tag{23}$$

В частном случае $n = m$ опыт фактически состоит в произвольном упорядочивании множества E, т. е. сводится к случайной перестановке элементов всего множества. При этом $A_n^n = n!$.

Пример 2. Из урны, содержащей n перенумерованных шаров, наугад вынимают один за другим все находящиеся в ней шары. Найти вероятность того, что номера вынутых шаров будут идти по порядку: $1, 2, \dots, n$.

Решение. Исходом является упорядоченный набор n чисел. Общее число исходов N равно $n!$. Событие $A = \{$номера вынутых шаров идут по порядку: $1, 2, \dots, n.\}$. Событию A благоприятствует один исход. По формуле (21)

$$\mathsf{P}(A) = \frac{M}{N} = \frac{1}{n!}\,.$$

□

Схема выбора, приводящая к размещениям с повторениями. Если выбор m элементов из $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ производится с возвращением и с упорядочиванием, то различными исходами будут всевозможные m-элементные наборы (вообще говоря, с повторениями), отличающиеся либо составом элементов, либо их порядком. Например, при $m = 4$ множества $\omega_1 = \{e_1, e_1, e_2, e_1\}$ и $\omega_2 = \{e_2, e_1, e_1, e_1\}$ — различные исходы. Общее число таких исходов определяется формулой $N = n^m$.

Пример 3. Опыт состоит в четырехкратном выборе с возвращением одной из букв «а», «б», «к», «о», «м» и выкладывании слова в порядке поступления букв. Какова вероятность выложить слово «мама»?

Решение. Общее число исходов равно числу размещений с повторениями из пяти элементов по четыре, т. е. 5^4. Слову «мама» соответствует лишь один возможный исход. Поэтому

$$\mathsf{P}(A) = \frac{M}{N} = \frac{1}{5^4}\,.$$

□

2° Формулы сложения и умножения вероятностей. *Суммой двух событий* A и B называется событие C, состоящее в осуществлении хотя бы одного из событий A или B. *Произведением двух событий* A и B называется событие C, состоящее в совместном осуществлении события A и события B.

Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$\mathsf{P}(A + B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B). \tag{24}$$

В случае, когда события A и B совместны, вероятность их суммы выражается формулой

$$\mathsf{P}(A + B) = \mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(A \cdot B),$$

где $A \cdot B$ – произведение событий A и B.

События A и B называются *независимыми*, если появление одного из них не меняет вероятности появления другого. Для независимых событий A и B $\mathsf{P}(A \cdot B) = \mathsf{P}(A)\,\mathsf{P}(B)$.

Событие $\bar{A}$ называется *противоположным* событию A, если оно состоит в непоявлении события A. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$\mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(\bar{A}) = 1.$$

Пример 4. По цели одновременно производится n выстрелов. Каждый выстрел независимо от других поражает цель с вероятностью p. Найти вероятность того, что после n выстрелов цель будет поражена.

Решение. Пусть событие A состоит в том, что после n выстрелов цель поражена, событие A_i – цель поражена при i-ом выстреле. Тогда событие $\bar{A}_i$ (цель при i-ом выстреле не поражена) имеет вероятность $\mathsf{P}(\bar{A}_i) = 1 - p$. Так как A_i, $i = 1, \ldots, n$ – независимые события, то $\bar{A}_i$ тоже независимы и $\mathsf{P}(\bar{A}) = \mathsf{P}(\bar{A}_1 \cdot \ldots \cdot \bar{A}_n) = \mathsf{P}(\bar{A}_1) \cdot \ldots \cdot \mathsf{P}(\bar{A}_n) = (1-p)^n$. Тогда $\mathsf{P}(A) = 1 - \mathsf{P}(\bar{A}) = 1 - (1-p)^n$. □

3° Испытания Бернулли. Независимые одинаковые испытания, в каждом из которых событие A происходит с вероятностью p, называются испытаниями Бернулли. Вероятность $\mathsf{P}_{n,m}$ того, что в n испытаниях Бернулли событие A произойдет ровно m раз, выражается формулой

$$\mathsf{P}_{n,m} = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}\,.$$

Пример 5. Прибор состоит из 10 узлов. Надежность (вероятность безотказной работы в течение времени t) для каждого узла равна p. Узлы выходят из строя независимо друг от друга. Найти вероятность того, что за время t: а) откажет хотя бы один узел; б) откажет ровно один узел; в) откажут ровно два узла; г) откажет не менее двух узлов.

Решение. а) Пусть событие B состоит в том, что за время t откажет хотя бы один узел. Тогда событие $\bar{B}$ заключается в безотказной работе всех узлов. Испытания узлов на надежность образуют испытания Бернулли, следовательно, $\mathbf{P}(\bar{B}) = C_{10}^{10} p^{10}(1-p)^{10-10} = p^{10}$. Тогда $\mathbf{P}(B) = 1 - \mathbf{P}(\bar{B}) = 1 - p^{10}$.
б) Каждый узел отказывает с вероятностью $q = 1-p$. Вероятность того, что откажет ровно один узел из десяти, равна $C_{10}^{1} q^1 (1-q)^{10-1} = 10(1-p)p^9$.
в) Вероятность того, что откажут ровно два узла из десяти, равна $C_{10}^{2} q^2 (1-q)^{10-2} = 45(1-p)^2 p^8$.
г) Событие «отказ не менее двух узлов» является противоположным событию «все узлы работают безотказно или отказал ровно один узел». Так как события «отказал ровно один узел» и «все узлы работают безотказно» несовместны, то согласно формуле (24) событие «все узлы работают безотказно или отказал ровно один узел» происходит с вероятностью $C_{10}^{1} q^1 (1-q)^{10-1} + p^{10} = 10(1-p)p^9 + p^{10}$. Тогда вероятность события «отказ не менее двух узлов» равна $1 - 10(1-p)p^9 - p^{10}$. □

4° **Случайные величины. Законы распределения. Числовые характеристики случайных величин.** *Рядом распределения* дискретной случайной величины X называется таблица, где перечислены возможные различные значения случайной величины $x_1, \ldots, x_n$ с соответствующими им вероятностями $p_1, \ldots, p_n$:

x_i :	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
p_i :	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

,

где $p_i = \mathbf{P}(X = x_i)$, $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Функцией распределения случайной величины X называется функция $F(x)$, значение которой в точке x равно вероятности того, что $X < x$: $F(x) = P(X < x)$. Для дискретных случайных величин функция распределения есть разрывная ступенчатая функция, непрерывная слева. Если функция распределения непрерывна на вещественной оси и имеет в каждой точке производную, случайная величина называется *непрерывной*. *Плотностью распределения* непрерывной случайной величины называется функция $f(x) = F'(x)$. Плотность распределения неотрицательна, $f(x) \geqslant 0$, и

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1. \tag{25}$$

Функция распределения выражается через плотность формулой

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)\,dx. \tag{26}$$

Вероятность попадания случайной величины на промежуток $[\alpha, \beta]$ выражается формулой

$$\mathsf{P}(\alpha \leqslant X \leqslant \beta) = F(\beta) - F(\alpha).$$

Для непрерывной случайной величины это можно записать в виде:

$$\mathsf{P}(\alpha < X < \beta) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx.$$

Математическое ожидание вычисляется по формулам:

$$\mathsf{M}\,X=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i \text{ — для дискретной случайной величины} \quad (27)$$

$$\mathsf{M}\,X=\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \text{ — для непрерывной величины.} \quad (28)$$

Дисперсия вычисляется по формулам:

$$\mathsf{D}\,X = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mathsf{M}\,X)^2 p_i \text{ — для дискретной величины,} \quad (29)$$

$$\mathsf{D}\,X=\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mathsf{M}\,X)^2 f(x) dx \text{ — для непрерывной величины.} \quad (30)$$

Справедлива следующая формула для вычисления дисперсии:

$$\mathsf{D}\,X = \mathsf{M}\,X^2 - (\mathsf{M}\,X)^2. \quad (31)$$

Средним квадратическим отклонением случайной величины X называется $\sigma_X = \sqrt{\mathsf{D}\,X}$.

Непрерывная случайная величина X *распределена по нормальному закону с параметрами* m, σ, если ее плотность распределения равна

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

Математическое ожидание случайной величины, распределенной по нормальному закону с параметрами m, σ, равно $\mathsf{M}\,X = m$, а дисперсия — $\mathsf{D}\,X = \sigma^2$. Вероятность попадания в интервал (α, β) выражается формулой

$$\mathsf{P}(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m}{\sigma}\right), \quad (32)$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ — функция Лапласа, значения которой затабулированы. Функция Лапласа обладает следующими свойствами: 1) $\Phi(0) = 0$; 2) $\Phi(+\infty) = 1/2$; 3) $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ (поэтому в таблице приводят значения $\Phi(x)$ только для положительных значений x).

Вероятность того, что нормально распределенная с параметрами m, σ случайная величина отклонится от m меньше, чем на δ, равна

$$\mathbf{P}(|X - m| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right). \tag{33}$$

Пример 6. Два стрелка стреляют каждый по своей мишени, делая независимо друг от друга по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка p_1, для второго p_2. Рассматриваются две случайные величины: X_1 — число попаданий первого стрелка; X_2 — число попаданий второго стрелка и их разность $Z = X_1 - X_2$. Построить ряд распределения случайной величины Z и найти ее характеристики $\mathbf{M}\,Z$ и $\mathbf{D}\,Z$.

Решение. Три возможных значения случайной величины Z: -1, 0, $+1$.

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(Z = -1) = \mathbf{P}(X_1 = 0)\,\mathbf{P}(X_2 = +1) = q_1 p_2;\\
&\mathbf{P}(Z = 0) = \mathbf{P}(X_1 = 0)\,\mathbf{P}(X_2 = 0) + \mathbf{P}(X_1 = 1)\,\mathbf{P}(X_2 = 1) =\\
&= q_1 q_2 + p_1 p_2;\\
&\mathbf{P}(Z = 1) = \mathbf{P}(X_1 = 1)\,\mathbf{P}(X_2 = 0) = p_1 q_2,
\end{aligned}$$

где $q_1 = 1 - p_1$, $q_2 = 1 - p_2$.

Ряд распределения:

z_i	-1	0	1
p_i	$q_1 p_2$	$q_1 q_2 + p_1 p_2$	$p_1 q_2$

;

$\mathsf{M}\,Z = (-1)q_1p_2 + 0(q_1q_2 + p_1p_2) + 1(p_1q_2) = p_1 - p_2.$

Для вычисления $\mathsf{D}\,Z$ воспользуемся формулой (31).

$$\mathsf{M}\,Z^2 = (-1)^2 q_1p_2 + 0^2(q_1q_2 + p_1p_2) + 1^2 p_1q_2 = q_1p_2 + p_1q_2 = \\ = p_1 + p_2 - 2p_1p_2;\ \mathsf{D}\,Z = \mathsf{M}\,Z^2 - (\mathsf{M}\,Z)^2 = p_1 + p_2 - 2p_1p_2 - \\ - (p_1 - p_2)^2 = p_1q_1 + p_2q_2.$$

Функция распределения случайной величины Z имеет вид:

$$F(z) = \begin{cases} 0, \quad z \in (-\infty, -1], \\ q_1p_2, \quad z \in (-1, 0], \\ q_1p_2 + q_1q_2 + p_1p_2, \quad z \in (0, 1], \\ q_1p_2 + q_1q_2 + p_1p_2 + p_1q_2 = 1, \quad z \in (1, \infty). \end{cases}$$

□

Пример 7. Случайная величина X распределена по нормальному закону. Известно,что $\mathsf{D}\,X = 4$ и $\mathsf{P}(X < 1) = 0,5$. Найти $\mathsf{P}(X > 0)$.

Решение. Так как $\mathsf{D}\,X = 4$, то $\sigma = 2$. По формуле (32) получим

$$\mathsf{P}(X > 0) = \mathsf{P}(0 < X < +\infty) = \Phi\left(\frac{+\infty - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{0 - m}{\sigma}\right) = \\ = \Phi\,(+\infty) + \Phi\left(\frac{m}{2}\right).$$

Найдем параметр m. По условию задачи

$$\mathsf{P}(X < 1) = \mathsf{P}(-\infty < X < 1) = \Phi\left(\frac{1 - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-\infty - m}{\sigma}\right) = \\ = \Phi\left(\frac{1 - m}{2}\right) - \Phi\,(-\infty) = \Phi\left(\frac{1 - m}{2}\right) + 0,5,$$

откуда

$$\Phi\left(\frac{1-m}{2}\right)+0,5=0,5 \Rightarrow \Phi\left(\frac{1-m}{2}\right)=0 \Rightarrow \frac{1-m}{2}=0 \Rightarrow m=1.$$

Окончательно находим

$$\mathbf{P}(X>0)=\Phi(+\infty)+\Phi\left(\frac{m}{2}\right)= \\ =0,5+\Phi(0,5)=0,5+0,191462=0,691462.$$

□

Пример 8. Случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами $m=16$ и $\sigma=2$. Найти границы, в которых с вероятностью $0,95$ следует ожидать значения случайной величины.

Решение. По формуле (33) имеем

$$\mathbf{P}(|X-m|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) \Rightarrow 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)=0,95 \Rightarrow \Phi\left(\frac{\delta}{2}\right)= \\ =0,475 \Rightarrow \frac{\delta}{2}=1,96 \Rightarrow \delta=3,92.$$

Найдем границы интервала: $|X-m|<\delta \Rightarrow |X-16|< <3,92 \Rightarrow -3,92<X-16<3,92 \Rightarrow 12,08<X<19,92.$ □

Пример 9. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases} 0, & |x|>\pi/2 \\ A\cos^2 x, & |x|\leqslant \pi/2. \end{cases}$$

Определить параметр A, функцию распределения $F(x)$, $\mathbf{M}\,X$, $\mathbf{D}\,X$, σ_X.

Решение. Найдем параметр A из условия (25) :

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} A\cos^2 x = A\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = A\frac{\pi}{2} = 1.$$

Следовательно, $A = 2/\pi$. Для нахождения функции распределения воспользуемся формулой (26). Тогда

$$F(x) = \begin{cases} 0, \quad x \in \left(-\infty, -\dfrac{\pi}{2}\right], \\ \dfrac{2}{\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{x} \cos^2 x\,dx = \dfrac{x}{\pi} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sin 2x}{2\pi}, \quad x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right], \\ 1, \quad x \in \left(\dfrac{\pi}{2}, +\infty\right). \end{cases}$$

Математическое ожидание $\mathsf{M}\,X$, дисперсию $\mathsf{D}\,X$ непрерывной случайной величины X надо искать по формулам (28), (30), среднее квадратическое отклонение $\sigma_X = \sqrt{\mathsf{D}\,X}$. $\square$

5° Элементы математической статистики. *Выборкой объема n из генеральной совокупности с функцией распределения $F_X(x)$* называется совокупность $x_1,\ x_2,\dots,x_n$ наблюдаемых значений случайной величины X, соответствующих n независимым повторениям случайного эксперимента. *Вариационным рядом* выборки $x_1,\ x_2,\dots,x_n$ называется способ ее записи, при котором элементы упорядочиваются по величине, т. е. записываются в виде последовательности $x^{(1)},\ x^{(2)},\dots,x^{(n)}$, где $x^{(1)} \leqslant x^{(2)} \leqslant \ldots \leqslant x^{(n)}$. Пусть среди элементов выборки $x_1,\ x_2,\dots,x_n$ выделены $m < n$ их различных значений, расположенных в порядке возрастания. Обозначим их $z^{(1)},\ z^{(2)},\dots,z^{(m)}$. Предположим, что каждое из них повторяется $n_1,\ \dots,\ n_m$ раз, $\sum\limits_{i=1}^{m} n_i = n$. Число n_i

называется *частотой*, а отношение n_i/n — *относительной частотой* значения $z^{(i)}$, $i = \overline{1, m}$. Таблицу вида

$z^{(1)}$	$z^{(2)}$	$\dots$	$z^{(m)}$
n_1	n_2	$\dots$	n_m

называют *статистическим рядом* выборки $x_1,\ x_2, \dots, x_n$.

Пусть $n(x)$ — число элементов в выборке $x_1, \dots, x_n$, меньших x, $x \in \mathbb{R}$. Функцию $F_n(x) = n(x)/n$ называют *выборочной функцией распределения*. Функция $F_n(x)$ является статистическим аналогом функции распределения $F(x)$ случайной величины X. Ее можно записать в следующем виде:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, \quad x \leqslant z^{(1)}, \\ \dfrac{n_i}{n}, \quad z^{(i)} < x \leqslant z^{(i+1)}, i = \overline{1, m-1}, \\ 1, \quad x > z^{(m)}. \end{cases}$$

Если выборка получена из непрерывной генеральной совокупности X, а объем ее большой, ($n > 50$), то статистические данные удобно представлять с помощью *гистограммы* и *полигона частот*. В этом случае область значений наблюдаемой случайной величины разбивают на равные интервалы, для данной выборки $x_1, \dots, x_n$ подсчитывают число элементов x_i, попавших в соответствующие интервалы (говорят, что данные группируются), и на каждом интервале, как на основании, строят прямоугольник с высотой n_i/nh, где h — длина интервала, n_i — число выборочных точек в данном интервале. Получаемую при этом фигуру и называют *гистограммой*. Количество интервалов выбирают приблизительно равным $\log_2 n + 1$. Верхнюю границу гистограммы можно рассматривать как статистический аналог плотности распределения наблюдаемой случайной величины. Другим аналогом плотности распределения является *полигон частот.* Если построена гистограмма, то ординаты, соответствующие средним точкам интервалов, последовательно соединяют отрезками прямых. Построенный кусочно-линейный график называется *полигоном частот.*

Выборочной оценкой математического ожидания случайной величины является *выборочное среднее*

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \tag{34}$$

а дисперсии — выборочная дисперсия

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2. \tag{35}$$

Если математическое ожидание m генеральной совокупности известно, то в (35) вместо $\bar{x}$ используют m. Выборочная дисперсия S^2 является смещенной оценкой $\mathsf{D}\,X$, т. е. $\mathsf{M}\,S^2 \neq \mathsf{D}\,X$. *Несмещенную оценку* дисперсии следует искать по формуле

$$\bar{S}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2). \tag{36}$$

Оценкой моды (*выборочной модой*) унимодального (одновершинного) распределения называется элемент выборки $\bar{d}_X$, встречающийся с наибольшей частотой. Оценкой медианы (*выборочной медианой*) называется число $\bar{h}_X$, которое делит вариационный ряд на две части, содержащие равное число элементов. Если $n = 2k + 1$, то $\bar{h}_X = x^{(k+1)}$, если $n = 2k$, то $\bar{h}_X = 1/2(x^{(k)} + x^{(k+1)})$.

Доверительные интервалы для параметров нормального распределения.

1) *Доверительный интервал для m при известном σ:*

$$\bar{x} - u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqslant m \leqslant \bar{x} + u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \tag{37}$$

Доверительная вероятность равна $1-\alpha$, $u_{\alpha/2}$ определяется из условия $\Phi(u_{\alpha/2}) = (1-\alpha)/2$, $\Phi(x)$ — функция Лапласа.

2) *Доверительный интервал для m при неизвестном* σ:

$$\bar{x} - t_{\alpha/2}(n-1)\frac{\bar{s}}{\sqrt{n}} \leqslant m \leqslant \bar{x} + t_{\alpha/2}(n-1)\frac{\bar{s}}{\sqrt{n}}. \tag{38}$$

Доверительная вероятность равна $1-\alpha$, $\bar{s} = \sqrt{\bar{S}^2}$, $t_{\alpha/2}(n-1)$ является $1-\alpha/2$ квантилью распределения Стьюдента с $n-1$ степенью свободы, т. е. корнем уравнения $S_{n-1}(t) = 1-\alpha/2$. Значения функции распределения Стьюдента $S_n(t)$ с n степенями свободы затабулированы.

Регрессия Y на X.

Для двух случайных величин Y и X *регрессией* Y на X называется условное математическое ожидание $\mathsf{M}[Y|X = x] = \varphi(x)$. График этой функции называется кривой регрессии. Функция регрессии может использоваться для предсказания значения случайной величины Y по фиксированному значению x случайной величины X. Если $\mathsf{M}[Y|X = x] = \beta_0 + \beta_1 x$, то говорят о *линейной регрессии* Y на X. Прямая $y = \beta_0 + \beta_1 x$ называется *прямой регрессии*. По выборке (x_i, y_i) можно получить оценки параметров β_0 и β_1:

$$\bar{\beta}_1 = r\frac{\bar{s}_y}{\bar{s}_x}, \quad \bar{\beta}_0 = \bar{y} - \bar{\beta}_1\bar{x} \tag{39}$$

Здесь $\bar{s}_x = \sqrt{\bar{S}_x^2}$, $\bar{s}_y = \sqrt{\bar{S}_y^2}$ (см. (36)), r называют *выборочным коэффициентом корреляции* и вычисляют по формуле

$$r = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \sum\limits_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}} \tag{40}$$

Выборки большого объема с повторяющимися наблюдениями представляют в виде *корреляционной таблицы*. Пусть среди значений x_i m различных, а среди y_i l различных, число пар (x_i, y_j) равно n_{ij}, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,l}$, $\sum_{i,j} n_{ij} = n$. Корреляционная таблица имеет вид:

Y	X						n_Y
	x_1	x_2	$\dots$	$\dots$	$\dots$	x_m	
y_1	n_{11}	n_{21}	$\dots$	$\dots$	$\dots$	n_{m1}	$\sum\limits_{i=1}^{m} n_{i1}$
y_2	n_{12}	n_{22}	$\dots$	$\dots$	$\dots$	n_{m2}	$\sum\limits_{i=1}^{m} n_{i2}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
y_l	n_{1l}	n_{2l}	$\dots$	$\dots$	$\dots$	n_{ml}	$\sum\limits_{i=1}^{m} n_{il}$
n_X	$\sum\limits_{j=1}^{l} n_{1j}$	$\sum\limits_{j=1}^{l} n_{2j}$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\sum\limits_{j=1}^{l} n_{mj}$	n

Пример 9. По корреляционной таблице найти выборочное уравнение $y - \bar{y} = r\dfrac{\bar{s}_y}{\bar{s}_x}(x - \bar{x})$ прямой регрессий Y на X.

Y	X						n_Y
	11	16	21	26	31	36	
10		4			1		5
20	2		2			6	10
30		6	3	40	2		51
40	10		1	2	6		19
50				4	8	3	15
n_X	12	10	6	46	17	9	$n = 100$

Решение. Найдем выборочные средние $\bar{x}$, $\bar{y}$.

$$\bar{x}=(11\cdot 12 + 16\cdot 10 + 21\cdot 6 + 26\cdot 46 + 31\cdot 17 + 36\cdot 9)/100=24,65,$$
$$\bar{y}=(10\cdot 5 + 20\cdot 10 + 30\cdot 51 + 40\cdot 19 + 50\cdot 15)/100=33,41.$$

Вычислим $\sum\limits_{i=1}^{m} n_{x_i}(x_i-\bar{x})^2$, $\sum\limits_{j=1}^{l} n_{y_j}(y_j-\bar{y})^2$:

$$\sum_{i=1}^{m} n_{x_i}(x_i-\bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{m} n_{x_i}x_i^2 - n\bar{x}^2 = 11^2\cdot 12 + 16^2\cdot 10 + 21^2\times$$
$$\times\, 6 + 26^2\cdot 46 + 31^2\cdot 17 + 36^2\cdot 9 - 100\cdot 24,65^2 = 65755-$$
$$-\, 100\cdot 24,65^2 = 4992,75,$$
$$\sum_{j=1}^{l} n_{y_j}(y_j-\bar{y})^2 = \sum_{j=1}^{l} n_{y_j}y_j^2 - n\bar{y}^2 = 10^2\cdot 5 + 20^2\cdot 10 + 30^2\times$$
$$\times\, 51 + 40^2\cdot 19 + 50^2\cdot 15 - 100\cdot 33,41^2 = 6679,19.$$

Тогда

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2} = \sqrt{4992,75\cdot 6679,19} \approx 5774,73,$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{l} n_{ij}(x_i-\bar{x})(y_j-\bar{y}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{l} n_{ij}x_iy_j-$$
$$-\, n\bar{x}\bar{y} = 11(2\cdot 20 + 10\cdot 40) + 16(4\cdot 10 + 6\cdot 30) + 21(2\cdot 20+$$
$$+\, 3\cdot 301\cdot 40) + 26(40\cdot 30 + 2\cdot 40 + 4\cdot 50) + 31(1\cdot 10 + 2\cdot 30+$$
$$+\, 6\cdot 40 + 8\cdot 50) + 36(6\cdot 20 + 3\cdot 50) - 100\cdot 24,65\cdot 33,41 =$$
$$= 82140 - 82355,65 = -215,65$$

По формуле (40) найдем выборочный коэффициент корреляции r:

$$r = -215,65/5774,73 \approx -0,037.$$

Далее, $\bar{s}_y/\bar{s}_x = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} n_{x_i}(x_i-\bar{x})^2 / \sum\limits_{j=1}^{l} n_{y_j}(y_j-\bar{y})^2} =$

$= \sqrt{6679,19/4992,75} \approx 1,16$, следовательно, уравнение регрессии имеет вид:

$y - 33,41 = -0,37 \cdot 1,16(x - 24,65)$ или $y - 33,41 = -0,43(x - 24,65)$.

□

ВАРИАНТ №1

Задача 1. Набирая номер телефона, абонент забыл последние три цифры, и помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что абонент набрал нужные цифры.

Задача 2. Вероятность наступления события A хотя бы 1 раз при трех испытаниях равна 0,936. Найти вероятность наступления события A при одном испытании.

Задача 3. Дан ряд распределения случайной величины X:

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_i	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1

Найти $P(X < 2)$, $P(X > 9)$, $P(2 \leqslant X \leqslant 9)$. Найти $\mathsf{M}\,X$, $\mathsf{D}\,X$, σ_X. Построить график функции распределения. Построить ряд распределения и найти $\mathsf{M}\,Y$, $\mathsf{D}\,Y$ для случайной величины $Y = 2X + 3$.

Задача 4. Вероятность того, что баскетболист при броске попадает в корзину, равна 0,1. Определить вероятность того, что сделав 7 бросков, он 4 раза попадет.

Задача 5. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 1 \\ \dfrac{A}{x^5}, & x > 1. \end{cases}$$

Определить: 1) параметр A; 2) функцию распределения $F(x)$; 3) $\mathbf{M}\,X$, $\mathbf{D}\,X$, σ_X. Построить графики $f(x)$ и $F(x)$.

Задача 6. Случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами $m = 11$ и $\sigma = 3$. Найти: 1) вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(17, 26)$; 2) вероятность того, что $|X - m|$ окажется меньше, чем 12.

Задача 7. Дана выборка объема n из нормальной генеральной совокупности X. Требуется: 1) построить вариационный ряд; 2) построить гистограмму и полигон частот; 3) построить график выборочной функции распределения; 4) найти выборочное среднее, выборочную дисперсию, несмещенную выборочную оценку дисперсии, выборочную моду, выборочную медиану; 5) найти доверительный интервал для математического ожидания.

$$\begin{array}{cccccccccc}
13 & 8 & 12 & 11 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 11, \\
10 & 10 & 12 & 12 & 13 & 12 & 13 & 11 & 13 & 9, \\
11 & 11 & 11 & 12 & 13 & 13 & 12 & 10 & 10 & 12, \\
13 & 13 & 15 & 11 & 13 & 10 & 10 & 13 & 14 & 11, \\
11 & 14 & 13 & 13 & 13 & 13 & 14 & 14 & 13 & 15.
\end{array}$$

Задача 8. По корреляционной таблице найти выборочное уравнение $y - \bar{y} = r\frac{\bar{s}_y}{\bar{s}_x}(x - \bar{x})$ прямой регрессий Y на X.

Y	X						n_Y
	4	9	14	19	24	29	
10	2	3					5
20		7	3				10
30			2	50	2		54
40			1	10	6		17
50				4	7	3	14
n_X	2	10	6	64	15	3	$n = 100$

ВАРИАНТ №2

Задача 1. В группе 12 студентов, среди них 8 отличников. По списку наудачу отобраны 9 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов 5 отличников.

Задача 2. Вероятность поражения цели хотя бы 1 пулей при 4 независимых выстрелах равна 0,59. Какова вероятность поражения цели при 1 выстреле?

Задача 3.Дан ряд распределения случайной величины X:

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	0,1	0,15	0,25	0,25	0,15	0,1

Найти $P(X < 2)$, $P(X > 5)$, $P(2 \leqslant X \leqslant 5)$. Найти $\mathsf{M}\,X$, $\mathsf{D}\,X$, σ_X. Построить график функции распределения. Построить ряд распределения и найти $\mathsf{M}\,Y$, $\mathsf{D}\,Y$ для случайной величины $Y = 2X + 2$.

Задача 4. Вероятность того, что баскетболист при броске попадет в корзину, равна 0,2. Определить вероятность того, что сделав 8 бросков, он 3 раза попадет.

Задача 5. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & |x| \geqslant \frac{\pi}{2} \\ A\cos x, & |x| < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Определить: 1) параметр A; 2) функцию распределения $F(x)$; 3) $\mathsf{M}\,X$, $\mathsf{D}\,X$, σ_X. Построить графики $f(x)$ и $F(x)$.

Задача 6. Случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами $m = 12$ и $\sigma = 5$. Найти: 1) вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(17, 22)$; 2) вероятность того, что $|X - m|$ окажется меньше, чем 15.

Задача 7. Дана выборка объема n из нормальной генеральной совокупности X. Требуется: 1) построить вариационный ряд; 2) построить гистограмму и полигон частот; 3) построить график выборочной функции распределения; 4) найти выборочное среднее, выборочную дисперсию, несмещенную выборочную оценку дисперсии, выборочную моду, выборочную медиану; 5) найти доверительный интервал для математического ожидания.

$$\begin{array}{cccccccccc}
17 & 15 & 18 & 20 & 17 & 22 & 18 & 21 & 14 & 18, \\
20 & 22 & 16 & 20 & 19 & 22 & 19 & 14 & 18 & 15, \\
15 & 21 & 17 & 18 & 15 & 22 & 18 & 13 & 16 & 20, \\
19 & 25 & 18 & 19 & 17 & 17 & 20 & 20 & 21 & 16, \\
19 & 18 & 21 & 19 & 20 & 19 & 19 & 18 & 17 & 18.
\end{array}$$

Задача 8. По корреляционной таблице найти выборочное уравнение $y - \bar{y} = r\frac{\bar{s}_y}{\bar{s}_x}(x - \bar{x})$ прямой регрессий Y на X.

Y	X						n_Y
	10	15	20	25	30	35	
30	2	6					8
40		4	4				8
50			7	35	8		50
60			2	10	8		20
70				5	6	3	14
n_X	2	10	13	50	22	3	$n = 100$

ВАРИАНТ №3

Задача 1. Бросают 4 игральные кости. Найти вероятность того, что на всех выпадет одинаковое число очков.

Задача 2. Вероятность того, что наудачу взятая деталь нестандартная, равна 0,1. Найти вероятность того,что среди взятых наудачу 5 деталей не более 2 нестандартных.

Задача 3. Дан ряд распределения случайной величины X:

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
p_i	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8

Найти $P(X < 2)$, $P(X > 7)$, $P(2 \leqslant X \leqslant 7)$. Найти $\mathsf{M}\, X$, $\mathsf{D}\, X$, σ_X. Построить график функции распределения. Построить ряд распределения и найти $\mathsf{M}\, Y$, $\mathsf{D}\, Y$ для случайной величины $Y = 3X + 1$.

Задача 4. Вероятность того, что баскетболист при броске попадает в корзину, равна 0,1. Определить вероятность того, что сделав 6 бросков, он 4 раза попадет.

Задача 5. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 2 \\ \dfrac{A}{x^4}, & x > 2. \end{cases}$$

Определить: 1) параметр A; 2) функцию распределения $F(x)$; 3) $\mathsf{M}\, X$, $\mathsf{D}\, X$, σ_X. Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

Задача 6. Случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами $m = 13$ и $\sigma = 4$. Найти: 1) вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(15, 17)$; 2) вероятность того, что $|X - m|$ окажется меньше, чем 6.

Задача 7. Дана выборка объема n из нормальной генеральной совокупности X. Требуется: 1) построить вариационный ряд; 2) построить гистограмму и полигон частот; 3) построить график выборочной функции распределения; 4) найти выборочное среднее, выборочную дисперсию, несмещенную выборочную оценку дисперсии, выборочную моду, выборочную медиану; 5) найти доверительный интервал для математического ожидания.

$$\begin{array}{cccccccccc}
19 & 19 & 20 & 21 & 21 & 21 & 19 & 24 & 22 & 22, \\
23 & 22 & 21 & 20 & 23 & 20 & 22 & 21 & 19 & 21, \\
22 & 17 & 25 & 22 & 23 & 18 & 21 & 22 & 20 & 22, \\
21 & 25 & 20 & 20 & 23 & 16 & 21 & 24 & 19 & 19, \\
17 & 21 & 21 & 24 & 19 & 17 & 22 & 22 & 21 & 24.
\end{array}$$

Задача 8. По корреляционной таблице найти выборочное уравнение $y - \bar{y} = r\frac{\bar{s}_y}{\bar{s}_x}(x - \bar{x})$ прямой регрессий Y на X.

Y	X						n_Y
	15	20	25	30	35	40	
5	4	2					6
10		6	4				10
15			6	45	2		53
20			2	8	6		16
25				4	7	4	15
n_X	4	8	12	57	15	4	$n = 100$

ВАРИАНТ №4

Задача 1. В партии из 10 изделий имеется 4 бракованных. Наугад выбирают 5 изделий. Найти вероятность того, что среди этих 5 изделий окажется 3 бракованных.

Задача 2. Вероятность того, что телевизор потребует ремонта в течение гарантийного срока, равна 0,2. Найти вероятность того,что в течение гарантийного срока из 6 телевизоров а) не более одного потребует ремонта; б) хотя бы 1 не потребует ремонта.

Задача 3. Дан ряд распределения случайной величины X:

x_i	1	3	5	7	9	11
p_i	0,1	0,15	0,25	0,25	0,15	0,1

Найти $P(X < 2)$, $P(X > 10)$, $P(3 \leqslant X \leqslant 9)$. Найти $\mathsf{M}\,X$, $\mathsf{D}\,X$, σ_X. Построить график функции распределения. Построить ряд распределения и найти $\mathsf{M}\,Y$, $\mathsf{D}\,Y$ для случайной величины $Y = 5X + 3$.

Задача 4. Вероятность того, что баскетболист при броске попадает в корзину, равна 0,1. Определить вероятность того, что сделав 7 бросков, он 3 раза попадет.

Задача 5. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ Axe^{-x}, & x > 0. \end{cases}$$

Определить: 1) параметр A; 2) функцию распределения $F(x)$; 3) $\mathsf{M}\,X$, $\mathsf{D}\,X$, σ_X. Построить графики $f(x)$ и $F(x)$.

Задача 6. Случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами $m = 14$ и $\sigma = 4$. Найти: 1) вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(18, 34)$; 2) вероятность того, что $|X - m|$ окажется меньше, чем 8.

Задача 7. Дана выборка объема n из нормальной генеральной совокупности X. Требуется: 1) построить вариационный ряд; 2) построить гистограмму и полигон частот; 3) построить график выборочной функции распределения; 4) найти выборочное среднее, выборочную дисперсию, несмещенную выборочную оценку дисперсии, выборочную моду, выборочную медиану; 5) найти доверительный интервал для математического ожидания.

$$\begin{array}{cccccccccc} 86 & 82 & 84 & 84 & 82 & 84 & 84 & 89 & 88 & 79, \\ 84 & 84 & 82 & 88 & 81 & 79 & 86 & 88 & 87 & 84, \\ 84 & 82 & 86 & 84 & 84 & 81 & 84 & 81 & 82 & 84, \\ 86 & 83 & 80 & 83 & 84 & 84 & 88 & 83 & 81 & 81, \\ 84 & 84 & 83 & 84 & 84 & 84 & 82 & 84 & 80 & 82. \end{array}$$

Задача 8. По корреляционной таблице найти выборочное уравнение $y - \bar{y} = r\frac{\bar{s}_y}{\bar{s}_x}(x - \bar{x})$ прямой регрессий Y на X.

Y	X						n_Y
	15	15	20	25	30	35	
6	4	2					6
12		6	2				8
18			5	40	5		50
24			2	8	7		17
30				4	7	8	19
n_X	4	8	9	52	19	8	$n = 100$

ВАРИАНТ №5

Задача 1. В зале 50 мест. Найти вероятность того, что из 10 человек 5 займут определённые места, если места занимаются ими случайным образом.

Задача 2. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,4. Найти вероятность разрушения объекта, если для этого необходимо не менее трех попаданий, а сделано 15 выстрелов.

Задача 3. Дан ряд распределения случайной величины X:

x_i	-2	-1	0	1	2	3
p_i	0,1	0,15	0,25	0,25	0,15	0,1

Найти $P(X < -1)$, $P(X > 2)$, $P(-1 \leqslant X \leqslant 2)$. Найти $\mathsf{M}\,X$, $\mathsf{D}\,X$, σ_X. Построить график функции распределения. Построить ряд распределения и найти $\mathsf{M}\,Y$, $\mathsf{D}\,Y$ для случайной величины $Y = 2X + 3$.

Задача 4. Вероятность того, что баскетболист при броске попадает в корзину, равна 0,1. Определить вероятность того, что сделав 9 бросков, он 4 раза попадет.

Задача 5. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & |x| > \frac{\pi}{6} \\ A\cos 3x, & x \leqslant \frac{\pi}{6}. \end{cases}$$

Определить: 1) параметр A; 2) функцию распределения $F(x)$; 3) $\mathsf{M}\,X$, $\mathsf{D}\,X$, σ_X. Построить графики $f(x)$ и $F(x)$.

Задача 6. Случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами $m = 15$ и $\sigma = 2$. Найти: 1) вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(16, 25)$; 2) вероятность того, что $|X - m|$ окажется меньше, чем 4.

Задача 7. Дана выборка объема n из нормальной генеральной совокупности X. Требуется: 1) построить вариационный ряд; 2) построить гистограмму и полигон частот; 3) построить график выборочной функции распределения; 4) найти выборочное среднее, выборочную дисперсию, несмещенную выборочную оценку дисперсии, выборочную моду, выборочную медиану; 5) найти доверительный интервал для математического ожидания.

202	210	210	202	186	195	195	186	186	202,
202	186	195	202	195	186	202	195	179	195,
159	195	195	195	186	210	195	174	186	202,
210	222	195	186	179	195	195	179	186	202,
202	195	195	195	210	202	195	179	195	183.

Задача 8. По корреляционной таблице найти выборочное уравнение $y - \bar{y} = r\frac{\bar{s}_y}{\bar{s}_x}(x - \bar{x})$ прямой регрессий Y на X.

Y	X						n_Y
	5	10	15	20	25	30	
20	1	5					6
30		5	3				8
40			9	40	2		51
50			4	11	6		21
60				4	7	3	14
n_X	1	10	16	55	15	3	$n = 100$

Литература

1. Бутузов О Ф., Крутицкая Н. Ч., Медведев Г. Н., Шишкин А. А. *Математический анализ в вопросах и задачах.* М.: Физматлит, 2002.

2. Гмурман В. Е. *Теория вероятностей и математическая статистика.* М.: Высшая школа, 2003.

3. Гмурман В. Е. *Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: Учеб. пос. для студентов вузов.* М.: Высшая школа, 1986.

4. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. *Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч.* М.: Высш. шк., 1986.

5. *Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов.* / Ред. Б. П. Демидович. М.: Астрель, 2002. 495 с.

6. Ильин В. А., Позняк Э. Г. *Основы математического анализа.* Ч. 1, 2. М.: Наука, 1980.

7. Кудрявцев В. А., Демидович Б. П. *Краткий курс высшей математики.* М.: Наука, 1989.

8. Минорский В. П. *Сборник задач по высшей математике.* М.: Наука, 1987.

9. Пискунов Н. С. *Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов.* Т. 1, 2. СПб.: Мифрил, 1996.

10. Самойленко А. М., Кривошея С. А., Перестюк Н. А. *Дифференциальные уравнения: примеры и задачи.* М.: Высш. шк., 1989.

11. Шипачев В. С. *Задачник по высшей математике.* М.: Высшая школа, 2001.

12. Шипачев В. С. *Высшая математика.* М.: Высшая школа, 1990, 1999.