Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего профессионального образования
ПЕТРОЗАВОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Е. Г. Ганенкова, К. Ф. Амозова

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ: ОСНОВНЫЕ КЛАССЫ ПРОСТРАНСТВ

Учебное пособие для студентов математического факультета

Петрозаводск
Издательство ПетрГУ
2013

УДК 517.98
ББК 22.16
Г19

Издается в рамках реализации комплекса мероприятий Программы стратегического развития ПетрГУ на 2012–2016 гг.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Петрозаводского государственного университета

Рецензенты:
д-р физ.-мат. наук, проф. *С. Р. Насыров* (Казанский (Приволжский) федеральный университет);
канд. физ.-мат. наук, доц. *Б. М. Широков* (Петрозаводский государственный университет)

Г19 **Ганенкова, Е. Г.**

Функциональный анализ: основные классы пространств : учебное пособие для студентов математического факультета / Е. Г. Ганенкова, К. Ф. Амозова. – Петрозаводск : Изд-во ПетрГУ, 2013. – 52 с.

ISBN 978-5-8021-1768-2

Пособие содержит теоретический материал, задачи и упражнения по некоторым разделам курса «Функциональный анализ».

Предназначено для студентов математических специальностей университетов, а также может быть полезно аспирантам и преподавателям.

УДК 517.98
ББК 22.16

ISBN 978-5-8021-1768-2

Содержание

Введение

Пособие содержит теоретический материал, задачи и упражнения по курсу «Функциональный анализ», раздел «Основные классы пространств».

Отметим, что задачи по функциональному анализу довольно специфичны. Многие из них требуют изобретательности, особого подхода, глубоких знаний и функционального анализа, и смежных дисциплин (теории множеств, математического анализа и пр.). Сложность добавляет и абстрактность самого курса. Мы постарались включить в пособие задачи и упражнения среднего уровня сложности, доступные для самостоятельного решения и помогающие студентам разобраться в основных понятиях и методах функционального анализа.

Пособие состоит из восьми разделов. В начале каждого излагаются основные понятия и теоретические сведения, необходимые для выполнения упражнений, а также предлагаются примеры решения типовых задач (если таковые по данной теме имеются). Все вычислительные и некоторые другие задачи снабжены ответами.

Часть упражнений, предложенных в пособии, заимствована из [1]–[11], многие из них подверглись обработке, часть задач составлена авторами.

Пособие предназначено для студентов классических университетов, обучающихся по направлениям «Математика» и «Прикладная математика». Является переизданием первой главы [3], в которой были устранены опечатки и добавлены новые задачи.

Авторы выражают благодарность П. А. Бородину, С. Р. Насырову и Б. М. Широкову за помощь, важные и полезные замечания при подготовке данного пособия.

1. Метрические пространства

Пусть X — произвольное множество. На этом множестве можно ввести понятие расстояния.

Отображение $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ называется **метрикой**, если для любых $x, y, z \in X$ оно удовлетворяет следующим условиям (аксиомам метрики):

M1) $\rho(x, y) \geq 0$; $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (аксиома тождества);

M2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (аксиома симметрии);

M3) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (неравенство треугольника).

Пара (X, ρ) называется **метрическим пространством**, а число $\rho(x, y)$ — **расстоянием** между элементами x и y.

Список основных метрических пространств приведен в приложении 1.

Задачи

1.1. Доказать, что аксиомы метрического пространства эквивалентны следующим:

1) $\rho(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$;

2) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(y, z) \quad \forall\ x, y, z \in X$.

1.2. Доказать, что для любых элементов x, y, z, t метрического пространства (X, ρ) справедливы неравенства:

1) $|\,\rho(x, z) - \rho(y, z)| \leq \rho(x, y)$ (второе неравенство треугольника);

2) $|\,\rho(x, z) - \rho(y, t)| \leq \rho(x, y) + \rho(z, t)$ (неравенство четырехугольника).

1.3. Проверить аксиомы метрики в пространствах из приложения 1.

1.4. Является ли метрическим пространством множество непрерывных на отрезке $[a; b]$ функций с определенным на нем отображением $\rho(x, y) = |x(t_0) - y(t_0)|$, где t_0 — фиксированная точка отрезка $[a; b]$?

1.5. Показать, что в пространстве B_0 неравенство треугольника выполняется в усиленной форме

$$\rho(x, z) \leq \max\{\rho(x, y), \rho(y, z)\}.$$

1.6. Доказать, что если $\rho(x, y) \neq \rho(y, z)$ в пространстве B_0, то $\rho(x, z) = \max\{\rho(x, y), \rho(y, z)\}$.

1.7. Пусть X – множество всех точек единичной окружности, $\rho(x, y)$ – длина кратчайшей дуги окружности, соединяющей x и y. Является ли (X, ρ) метрическим пространством?

1.8. Рассмотрим множества:

а) X_1 всех прямых вида $x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = 0$, α, p – любые вещественные числа;

б) X_2 всех прямых вида $x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = 0$, p – любое вещественное число, $\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Для двух прямых

$$L_1: \; x \cos\alpha_1 + y \sin\alpha_1 - p_1 = 0,$$

$$L_2: \; x \cos\alpha_2 + y \sin\alpha_2 - p_2 = 0$$

определим отображение

$$\rho(L_1, L_2) = |p_1 - p_2| + |\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2|.$$

Являются ли пары (X_1, ρ) и (X_2, ρ) метрическими пространствами?

1.9. Пусть пространство X с введенным на нем отображением ρ не является метрическим, $X_0 \subset X$. Может ли пара (X_0, ρ) быть метрическим пространством?

1.10. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Доказать, что отображения:

1) $\rho_1(x, y) = \dfrac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)}$,

2) $\rho_2(x,y) = \min\{\rho(x,y), 1\}$,

3) $\rho_3(x,y) = \ln(1+\rho(x,y))$

являются метриками в X.

1.11. Пусть $Z = X \times Y$, $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$ — элементы Z, (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) — метрические пространства. Доказать, что отображения:

1) $\rho_1(z_1, z_2) = \rho_X(x_1, x_2) + \rho_Y(y_1, y_2)$,

2) $\rho_2(z_1, z_2) = \max\{\rho_X(x_1, x_2), \rho_Y(y_1, y_2)\}$

являются метриками в Z.

1.12. Говорят, что метрика ρ, введенная на линейном пространстве X, обладает свойствами:

а) *инвариантности относительно сдвига*, если для любых $x, y, z \in X$ выполняется равенство

$$\rho(x+z, y+z) = \rho(x,y);$$

б) *абсолютной однородности*, если для любых $x, y \in X$ и любой константы $\lambda \in \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) верно

$$\rho(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| \rho(x,y).$$

Привести пример метрики:

а) удовлетворяющей свойствам инвариантности относительно сдвига и абсолютной однородности;

б) удовлетворяющей свойству инвариантности относительно сдвига, но не обладающей свойством абсолютной однородности;

в) удовлетворяющей свойству абсолютной однородности, но не обладающей свойством инвариантности относительно сдвига;

г) не удовлетворяющей свойствам инвариантности относительно сдвига и абсолютной однородности.

1.13. Каким условиям должна удовлетворять определенная на $\mathbb{R}$ непрерывная функция $u = f(v)$, чтобы на $\mathbb{R}$ можно было задать метрику равенством

$$\rho(x, y) = |f(x) - f(y)|?$$

1.14. Между реками (непрерывными кривыми на плоскости, содержащими концы) Γ_1 и Γ_2 нужно построить канал (отрезок). Естественно предположить, что расстояние между реками — длина самого короткого из возможных каналов, т. е.

$$\rho(\Gamma_1, \Gamma_2) = \min_{\substack{x \in \Gamma_1, \\ y \in \Gamma_2}} |x - y|.$$

Задает ли это правило метрику на множестве всех рек?

1.15. *Хаусдорфова метрика.*

Пусть имеются две дороги (непрерывными кривыми на плоскости, содержащими концы) Γ_1 и Γ_2. По дорогам движется машина (точка), поливающая их. Будем считать, что машина поливает вокруг себя площадь замкнутого круга, причем радиус полива можно менять. Найдем наименьший радиус, при котором при движении машины по одной из дорог будут политы обе.

Рассмотрим сначала случай, когда машина едет по дороге Γ_1. Чтобы полить фиксированную точку $y \in \Gamma_2$, нужно установить радиус полива (он будет наименьшим)

$$R(y) = \min_{x \in \Gamma_1} |x - y|.$$

Чтобы полить все точки y на Γ_2, необходимо взять наибольший из радиусов $R(y)$

$$R_1(\Gamma_1, \Gamma_2) = \max_{y \in \Gamma_2} \min_{x \in \Gamma_1} |x - y|.$$

Аналогично, чтобы полить дорогу Γ_1 машине, идущей по Γ_2, необходимо выбрать радиус полива

$$R_2(\Gamma_1, \Gamma_2) = \max_{y \in \Gamma_1} \min_{x \in \Gamma_2} |x - y|.$$

Наконец, обе дороги будут политы при движении машины по одной из дорог, если взять радиус

$$\rho(\Gamma_1, \Gamma_2) = \max\left\{\max_{y\in\Gamma_2}\min_{x\in\Gamma_1}|x-y|, \max_{y\in\Gamma_1}\min_{x\in\Gamma_2}|x-y|\right\}.$$

Это отображение называется *Хаусдорфовой метрикой.*

1) Проверить, что отображение $\rho(\Gamma_1, \Gamma_2)$ является метрикой.

2) Являются ли метриками на заданном множестве кривых отображения $R_1(\Gamma_1, \Gamma_2)$ и $R_2(\Gamma_1, \Gamma_2)$?

3) Будет ли отображение $\rho(\Gamma_1, \Gamma_2)$ метрикой на множестве всех непрерывных кривых на плоскости конечной длины (концы кривой могут ей не принадлежать)?

1.16. Является ли метрикой заданное на множестве $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ отображение: для $x, y \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ пусть $\rho(x, y)$ — число целых точек, лежащих на отрезке $[x, y]$, минус один?

2. Нормированные пространства

Пусть X — линейное пространство над числовым полем $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{R}$). Отображение $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ называется **нормой**, если для любых $x, y \in X$ и $\lambda \in \mathbb{K}$ оно удовлетворяет условиям (аксиомы нормы):

N1) $\|x\| \geq 0$; $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$ — нулевой элемент пространства X (аксиома тождества);

N2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ (абсолютная однородность);

N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника).

Пара $(X, \|\cdot\|)$ называется **линейным нормированным пространством** или (для краткости) нормированным пространством.

Любое нормированное пространство становится метрическим, если в нем задать метрику формулой

$$\rho(x, y) = \|x - y\|.$$

Введенная таким образом метрика обладает свойствами:

1^0) инвариантности относительно сдвига: $\forall\, x, y, z \in X$ выполняется равенство

$$\rho(x + z, y + z) = \rho(x, y);$$

2^0) абсолютной однородности: для любых $x, y \in X$ и любой константы λ верно

$$\rho(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| \rho(x, y).$$

Если на линейном пространстве X введена метрика ρ, обладающая свойствами инвариантности относительно сдвига и абсолютной однородности, то X является и нормированным пространством: норму можно задать равенством $\|x\| = \rho(x, \theta)$.

Нормы $\|x\|_1$ и $\|x\|_2$ в линейном пространстве X называются **эквивалентными**, если существуют такие числа $\alpha > 0$, $\beta > 0$, что для любого $x \in X$ выполняется неравенство $\alpha\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1$.

Список основных нормированных пространств приведен в приложении 2.

Пример. *Показать, что отображение*

$$\|x\| = \max_{t\in[a;\ b]} |x(t)|$$

определяет норму в пространстве $C[a;b]$.

Решение. Каждой функции $x(t)$ пространства $C[a;b]$ отображение $\|\cdot\|$ ставит в соответствие вещественное число $\max\limits_{t\in[a;b]} |x(t)|$ (этот максимум существует в силу теоремы Вейерштрасса). Проверим выполнимость аксиом нормы.

N1) Так как $|x(t)| \geq 0$ для любого $t \in [a;b]$, то $\|x\| \geq 0\ \forall\ x \in C[a;b]$.

Пусть $\|x\| = 0$. Тогда $\max\limits_{t\in[a;b]} |x(t)| = 0$. Поэтому $|x(t)| = 0$ для любого $t \in [a;b]$, т. е. $x(t) \equiv 0$ на $[a;b]$ (x является нулевым элементом пространства X).

Если x является нулевым элементом пространства X, т. е. $x(t) \equiv 0$ на $[a;b]$, то сразу получим, что $\|x\| = 0$.

N2) $\|\lambda x\| = \max\limits_{t\in[a;b]} |\lambda x(t)| = |\lambda| \max\limits_{t\in[a;b]} |x(t)| = |\lambda| \cdot \|x\|$.

N3) Зафиксируем $t \in [a;b]$. Рассмотрим выражение $|x(t) + y(t)|$. Применяя к нему неравенство треугольника, справедливое для модуля числа, получим $|x(t)+y(t)| \leq |x(t)|+|y(t)| \leq \max\limits_{t\in[a;b]} |x(t)|+ \max\limits_{t\in[a;b]} |y(t)|$. То есть $|x(t) + y(t)| \leq \|x\| + \|y\|$. В силу того что последнее неравенство справедливо для каждого $t \in [a;b]$, можем утверждать, что и $\max\limits_{t\in[a;b]} |x(t) + y(t)| \leq \|x\| + \|y\|$, т. е. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Следовательно, указанное отображение определяет норму в пространстве $C[a;b]$.

Задачи

2.1. Доказать, что в определении нормы условие $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$ можно заменить на $\|x\| = 0 \Rightarrow x = \theta$.

2.2. Проверить выполнимость аксиом нормы в пространствах приложения 2.

2.3. Измеримая на $[a;b]$ по Лебегу функция $x(t)$ называется *существенно ограниченной,* если существует такая константа $C > 0$, что $|x(t)| \leq C$ почти всюду на $[a;b]$.

Наименьшая из таких констант C называется *существенным супремумом* функции $|x(t)|$ и обозначается $\operatorname*{ess\,sup}\limits_{t\in[a;b]} |x(t)|$.

Справедлива формула

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[a;b]} |x(t)| = \inf_{A:\mu(A)=0} \sup_{[a;b]\setminus A} |x(t)|,$$

где μ — мера Лебега.

Обозначим через $L_\infty[a;b]$ пространство классов эквивалентных измеримых функций, существенно ограниченных на $[a;b]$.

1. Привести пример измеримой функции, не принадлежащей $L_\infty[a;b]$.

2. Привести пример измеримой функции, принадлежащей $L_\infty[a;b]$, но не являющейся ограниченной на $[a;b]$.

3. Проверить, что $L_\infty[a;b]$ является нормированным пространством (см. приложение 2).

2.4. Функция $x(t)$, заданная на $[a;b]$, называется *функцией с ограниченной вариацией*, если существует такая константа C, что для любого разбиения отрезка $[a;b]$

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$$

выполняется неравенство $\sum\limits_{k=1}^{n} |x(t_k) - x(t_{k-1})| < C$.

Полной вариацией такой функции называется число

$$\mathop{\mathbf{V}}_a^b x(t) = \sup \sum_{k=1}^{n} |x(t_k) - x(t_{k-1})|,$$

где супремум берется по всем разбиениям отрезка $[a;b]$.

Показать, что пространство $V[a;b]$ функций с ограниченной на $[a;b]$ вариацией является нормированным (см. приложение 2).

2.5. Можно ли в линейном пространстве $C^{(1)}[0;1]$ за норму элемента принять:

а) $\|x\| = \max\limits_{t\in[0;1]} |x(t)|$;

б) $\|x\| = \max\limits_{t\in[0;1]} |x'(t)|$;

в) $\|x\| = \max\limits_{t\in[0;1]} |x(t)| + \max\limits_{t\in[0;1]} |x'(t)|$;

г) $\|x\| = -\max\limits_{t\in[0;1]} |x(t)|$;

д) $\|x\| = \max\limits_{t\in[0;1]} |x'(t)| + |x(a)|$, a – фиксированное число из отрезка $[0;1]$;

е) $\|x\| = \max\limits_{t\in[0;1/2]} |x(t)|$;

ж) $\|x\| = \max\limits_{t\in[0;1]} |x'(t)| + \int\limits_0^1 |x(t)|\,dt$;

з) $\|x\| = e^{\max\limits_{t\in[0;1]} |x(t)|} - 1$;

и) $\|x\| = \max\limits_{t\in[0;1]} |x'(t)| + |x(a) - x(b)|$, $a, b \in [0;1]$;

к) $\|x\| = i \max\limits_{t\in[0;1]} |x(t)| + \max\limits_{t\in[0;1]} |x'(t)|$, i — мнимая единица;

л) $\|x\| = x(t) + ix'(t)$, i — мнимая единица?

2.6. Пусть $\alpha_k > 0$ $(k = 1 \ldots, n)$. Можно ли в $\mathbb{R}^n$ ввести норму следующими способами:

а) $\|x\| = \max\limits_{1\le k\le n} (\alpha_k |x_k|)$;

б) $\|x\| = \max\limits_{1\le k\le n-1} (\alpha_k |x_k|)$;

в) $\|x\| = \sum\limits_{k=1}^{n} (\alpha_k |x_k|)$;

г) $\|x\| = \sum\limits_{k=1}^{n} (\alpha_k |x_k|^2)$;

д) $\|x\| = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$;

е) $\|x\| = \left[\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k |x_k|^2\right]^{\frac{1}{2}}$;

ж) $\|x\| = \left[\sum\limits_{m=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{m}|x_k|^2\right]^{\frac{1}{2}}$;

з) $\|x\| = \max\limits_{1\le k\le n}\left|\sum\limits_{m=1}^{k}x_m\right|$?

2.7. Пусть $(x, \|\cdot\|)$ – линейное нормированное пространство. Является ли отображение

$$\|x\|_1 = \frac{\|x\|}{1+\|x\|}$$

нормой в X?

2.8. Пусть $X = X_1 \times X_2$, где $(X_1, \|\cdot\|_1)$, $(X_2, \|\cdot\|_2)$ — линейные нормированные пространства. Является ли нормами в пространстве X функции:

а) $\|(x_1,x_2)\| = \|x_1\|_1 + \|x_2\|_2$;

б) $\|(x_1,x_2)\| = \|(\|x_1\|_1, \|x_2\|_2)\|_3$, где $\|\cdot\|_3$ — произвольная норма в $\mathbb{R}^2$, обладающая свойством монотонности, т. е. если $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a \le c$, $b \le d$, то $\|(a,b)\|_3 \le \|(c,d)\|_3$?

2.9. Можно ли в пространстве последовательностей s ввести норму так, чтобы для любых $x, y \in s$ выполнялось равенство $\rho(x,y) = \|x-y\|$?

2.10. Найти норму функции $x(t) = t^\alpha$ в тех пространствах $L_p[0;1]$ $(p \ge 1)$, которым эта функция принадлежит.

3. Множества в метрических и нормированных пространствах

Пусть (X, ρ) — *метрическое пространство.*

Открытым шаром $B(x_0, r)$ с центром в точке x_0 радиусом r называется множество

$$\{x \in X : \rho(x, x_0) < r\},$$

замкнутым шаром $B[x_0, r]$ с центром в точке x_0 радиусом r является множество

$$\{x \in X : \rho(x, x_0) \leq r\}.$$

Аналогично определяются открытый и замкнутый шары *в линейном нормированном пространстве* $(X, \|\cdot\|)$:
открытый шар $B(x_0, r) = \{x \in X : \|x - x_0\| < r\}$,
замкнутый шар $B[x_0, r] = \{x \in X : \|x - x_0\| \leq r\}$.

Множество $M \subset X$ будем называть **открытым**, если для каждой точки из M найдется открытый шар с центром в этой точке, содержащийся в M.

Точку $x \in X$ назовем **предельной** точкой множества M, если в любом шаре с центром в этой точке найдется бесконечно много точек множества M.

Множество $M \subset X$ называется **замкнутым**, если оно содержит все свои предельные точки.

Множество $M \subset X$ называется **ограниченным**, если существует шар, содержащий это множество.

Пусть X — линейное пространство, $x, y \in X$. Отрезком, соединяющим x и y, называется множество

$$[x, y] = \{z \in X : z = (1-t)x + ty, t \in [0, 1]\}.$$

Множество $M \subset X$ называется **выпуклым**, если вместе с любыми двумя точками оно содержит и отрезок, соединяющий их.

Задачи

3.1. Пусть $A, B \in \mathbb{R}^2$ и $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$. Описать шары в $\mathbb{R}^2$ с метриками:

а) $\rho(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$;

б) $\rho(A, B) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$;

в) $\rho(A, B) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$.

3.2. Описать шар радиусом r с центром x в $C[a, b]$.

3.3. Описать открытые и замкнутые шары в метрическом пространстве X_d.

3.4. Описать все открытые и замкнутые множества в пространстве X_d.

3.5. Является ли открытым в пространстве $C[a; b]$ множество функций $x(t)$, таких, что для любого $t \in [a; b]$ выполняется неравенство $|x(t)| < 1$?

3.6. Доказать, что в метрическом пространстве X открытый шар является открытым множеством, а замкнутый шар — замкнутым множеством.

3.7. *Замыканием* $\overline{M}$ множества M называется объединение множества M и множества предельных точек множества M.

Верно ли, что в произвольном метрическом пространстве $\overline{B(x_0, r)} = B[x_0, r]$?

3.8. Показать, что в пространстве B_0:

а) любой открытый шар $B(x, r)$ является замкнутым множеством, но может не быть замкнутым шаром;

б) $B(y, r) = B(x, r)$ для любого $y \in B(x, r)$;

в) любой замкнутый шар $B[x, r]$ является открытым множеством, но не обязательно является открытым шаром;

г) $B[y, r] = B[x, r]$ для любого $y \in B[x, r]$;

д) если два шара в B_0 имеют общую точку, то один из них содержится в другом.

3.9. Привести пример метрического пространства и двух шаров в этом пространстве, таких, что шар с большим радиусом содержится в шаре с меньшим радиусом.

3.10. Доказать, что если шар радиусом 7 содержится в шаре радиусом 3, то они совпадают.

3.11. Доказать, что множество $M \subset X$ ограничено тогда и только тогда, когда для любой последовательности $x_n \in M$ и любой последовательности $\lambda_n \in \mathbb{K}$, сходящейся к нулю, последовательность $\lambda_n x_n$ сходится к нулевому элементу пространства X.

3.12. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. *Диаметром* множества $M \subset$ называется величина

$$\operatorname{diam} M = \sup_{x,y \in M} \rho(x, y).$$

Доказать, что множество M является ограниченным тогда и только тогда, когда diam $M < \infty$.

3.13. Доказать, что всякий шар в нормированном пространстве является выпуклым множеством.

3.14. Будет ли шар в линейном метрическом пространстве являться выпуклым множеством?

3.15. Пусть X — линейное пространство. *Алгебраической суммой* множеств A и B пространства X называется множество

$$A + B = \{z \in X : z = x + y;\ x \in A,\ y \in B\}.$$

Пусть A, $B \subset X$ — выпуклые множества. Будет ли алгебраическая сумма множеств A и B являться выпуклым множеством?

3.16. Пусть X — линейное пространство, $A \subset X$ — выпуклое множество и $\lambda \in \mathbb{R}$. Является ли множество

$$\lambda A = \{z \in X :\ z = \lambda x,\ x \in A\}$$

выпуклым?

3.17. Пусть X — линейное пространство, $A \subset X$ — выпуклое множество и $x_0 \in X$. Является ли множество

$$x_0 + A = \{z \in X: \ z = x_0 + x, \ x \in A\}$$

выпуклым?

3.18. Пусть A и B — выпуклые множества из линейного пространства X. Будут ли $A \bigcup B$, $A \backslash B$, $A^c = X \backslash A$ являться выпуклыми множествами?

3.19. Пусть $C = \bigcap\limits_{\alpha \in A} C_\alpha$, где C_α — выпуклые множества, A — некоторое множество индексов. Будет ли множество C выпуклым?

3.20. Пусть $X = C[a;b]$, M — множество таких функций $f(x)$ из X, что $|f(x)| \leqslant 1$. Показать, что M является выпуклым множеством.

3.21. Доказать, что параллелепипед

$$P = \{x = (\xi_1, \xi_2, ...) \in l_2 : |\xi_k| \leqslant 2^{-k+1} \ \forall \ k\}$$

является выпуклым множеством в l_2.

3.22. Показать, что эллипсоид

$$E = \{x = (\xi_1, \xi_2, ...) \in l_2 : \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \xi_k^2 \leqslant 1\}$$

является выпуклым множеством в l_2.

3.23. Будет ли выпуклым множество:

а) многочленов степени $= k$;

б) многочленов степени $\leqslant k$;

в) непрерывных на $[0;1]$ функций, удовлетворяющих условию

$$\int\limits_0^1 |x(t)| dt \leqslant 1;$$

г) непрерывных на $[0;1]$ функций, удовлетворяющих условию

$$\int\limits_0^1 |x(t)|^2 dt \leqslant 1;$$

д) непрерывно дифференцируемых на $[0;1]$ функций, удовлетворяющих условию $\max\limits_{t\in[0,1]} |x(t)| + \max\limits_{t\in[0,1]} |x'(t)| \leqslant 1$;

е) всех четных функций, определенных на $\mathbb{R}$;

ж) всех нечетных функций, определенных на $\mathbb{R}$;

з) всех функций, определенных на $\mathbb{R}$, которые либо четны, либо нечетны;

и) всех возрастающих функций, определенных на $\mathbb{R}$;

к) всех убывающих функций, определенных на $\mathbb{R}$;

л) всех монотонных функций, определенных на $\mathbb{R}$;

м) всех функций $x(t)$, для которых $x(0) = 0$;

н) всех периодических функций;

о) всех $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_p$, для которых $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k = 0$ (здесь n — фиксированное натуральное число)?

4. Сходимость в метрических и нормированных пространствах

Если (X, ρ) — *метрическое пространство*, $x_n, x \in X$, то говорят, что последовательность x_n при $n \to \infty$ **сходится** к x, и обозначают $x_n \to x$ при $n \to \infty$, если $\rho(x_n, x) \to 0$ при $n \to \infty$.

В *линейном нормированном пространстве* $(X, \|\cdot\|)$ последовательность x_n при $n \to \infty$ **сходится** к x (обозначается, как и ранее), если $\|x_n - x\| \to 0$ при $n \to \infty$.

Последовательность x_n называется **сходящейся** в метрическом (линейном нормированном пространстве) X, если существует $x \in X$, для которого $x_n \to x$ при $n \to \infty$. Отметим, что сходящаяся последовательность имеет единственный предел.

Сходящаяся последовательность $x_n \in X$ всегда является **фундаментальной**, т. е. $\rho(x_n, x_m) \to 0$ при $n, m \to \infty$ (в случае метрического пространства) или $\|x_n - x_m\| \to 0$ при $n, m \to \infty$ (в случае нормированного пространства).

Пример. *Исследовать на сходимость последовательности*:
1. $x_n = (\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n}, 0, 0, \ldots)$ *в пространстве* s;
2. $x_n(t) = t^n - t^{2n}$ *в пространстве* $C[0;1]$.

Решение

1. Последовательность x_n при $n \to \infty$ покоординатно сходится к элементу $x = (1, 1, \ldots) \in s$. Для того чтобы выяснить, сходится ли x_n к x при $n \to \infty$ в пространстве s, рассмотрим величину $\rho(x_n, x)$. Зная, как задается метрика в пространстве s, перепишем эту величину в виде

$$\rho(x_n, x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|1-0|}{1+|1-0|} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Последняя сумма является суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем 1/2 , поэтому

$$\rho(x_n, x) = \frac{2^{-(n+2)}}{1-1/2} = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Следовательно, $\rho(x_n, x) \to 0$ при $n \to \infty$. Значит, последовательность x_n сходится в пространстве s к элементу $x = (1, 1, \ldots)$.

2. Поточечно последовательность $x_n(t)$ сходится к $x(t) \equiv 0$.

Проверим, будет ли x_n сходиться к x в $C[0;1]$. Для этого рассмотрим

$$\|x_n - x\| = \max_{t\in[0;1]} |x_n(t) - x(t)| = \max_{t\in[0;1]} |t^n - t^{2n}|.$$

Найдем максимум модуля функции $f(t) = t^n - t^{2n}$ на отрезке $[0;1]$. Производная $f'(t) = nt^{n-1} - 2nt^{2n-1}$ обращается в нуль в точках $t = 0$ и $t = \sqrt[n]{1/2}$, следовательно, максимум $|f(t)|$ достигается либо в этих точках, либо в точке $t = 1$ (конец промежутка). Сравнивая значения $|f(0)| = 0$, $|f(1)| = 0$, $|f(\sqrt[n]{1/2})| = 1/4$, приходим к выводу, что $\|x_n - x\| = 1/4 \nrightarrow 0$ при $n \to \infty$. Значит, x_n не сходится к x в $C[0;1]$.

Покажем, что x_n не сходится ни к какому другому элементу из $C[0;1]$. Рассмотрим

$$\|x_n - x_{2n}\| = \max_{t\in[0;1]} |x_n(t) - x_{2n}(t)| = \max_{t\in[0;1]} |t^n - 2t^{2n} + t^{4n}|.$$

Последний максимум больше значения выражения $|t^n - 2t^{2n} + t^{4n}|$ в точке $t = \sqrt[n]{1/2}$, равного 1/16. Поэтому $\|x_n - x_{2n}\| \geq 1/16$, т. е. $\|x_n - x_{2n}\| \nrightarrow 0$ при $n \to \infty$ и последовательность x_n не является фундаментальной, а значит, и сходящейся в $C[0;1]$.

Задачи

4.1. Выяснить смысл сходимости в пространствах:

а) $C[a;b]$;

б) $C^{(n)}[a;b]$;

в) l_∞;

г) s.

4.2. Как в пространстве $C^{(n)}[a;b]$ можно ввести норму, чтобы сходимость по этой норме имела тот же смысл, что и сходимость по норме из приложения 2?

4.3. Пусть X — линейное нормированное пространство, $x_n,\ x,\ y_n, y \in X$ и $\lambda_n,\ \lambda$ — константы. Доказать, что если:

а) $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$, то последовательность x_n ограничена;

б) $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$, $\lambda_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda$, то $\lambda_n x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda x$;

в) $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$, $\|x_n - y_n\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, то $y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$;

д) $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$, то $\|x_n - y\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \|x - y\|$;

е) $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$, $y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} y$, то $\|x_n - y_n\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \|x - y\|$.

4.4. Пусть $x_n(t),\ x(t),\ y_n(t),\ y(t) \in C[a;b]$ и $x_n(t) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x(t)$. Доказать, что $x_n(t)y_n(t) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x(t)y(t)$.

4.5. Сходится ли последовательность

$$x_n(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1} - \frac{t^{n+2}}{n+2}$$

в пространствах:

а) $C[0;1]$;

б) $C^{(1)}[0;1]$?

4.6. Исследовать на сходимость последовательность

$$x_n = \left(\underbrace{0, 0, \ldots, 0,}_{n} \frac{1}{2^n+1}, \frac{1}{2^n+2}, \ldots, \frac{1}{2^n+n}, 0, \ldots\right)$$

в пространствах $l_\infty,\ l_p,\ c_0$.

4.7. Исследовать на сходимость в $L_2[0;1]$ последовательность $x_n(t) = n^2 t e^{-nt}$.

4.8. В каких из пространств — l_p, l_∞, s — сходятся последовательности:

а) $x_n = (1, 2, \ldots, n, 0, 0, \ldots)$;

б) $x_n = (\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n}, 0, 0, \ldots)$;

в) $x_n = \left(\underbrace{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}}_{n}, 0, 0, \ldots\right);$

г) $x_n = \left(\underbrace{\frac{1}{n^\alpha}, \frac{1}{n^\alpha}, \ldots, \frac{1}{n^\alpha}}_{n}, 0, 0, \ldots\right)?$

4.9. Исследовать на сходимость в пространстве l_2 последовательность

$$x_n = \left(\underbrace{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}}_{n^2}, 0, 0, \ldots\right).$$

4.10. Исследовать на сходимость в пространствах c_0 и l_p последовательности:

а) $x_n = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, 0, \ldots\right);$

б) $x_n = \left(\frac{1}{\ln 2}, \frac{1}{\ln 3}, \ldots, \frac{1}{\ln(n+1)}, 0, 0, \ldots\right).$

4.11. Какие последовательности сходятся в $C[0;1]$:

а) $x_n(t) = t^n;$

б) $x_n(t) = \sin \pi n t;$

в) $x_n(t) = \frac{1}{2n}\sqrt[5]{n^5 t + 3}?$

5. Полные пространства

Пусть X — метрическое пространство. Пространство X будем называть **полным**, если в нем сходится всякая фундаментальная последовательность.

Полное линейное нормированное пространство называют **банаховым** пространством. Любое метрическое пространство (необязательно полное) можно включить в некоторое полное метрическое пространство. Всякое подмножество $M \subset X$ метрического пространства (X, ρ_X), такое, что $\rho_M(x, y) = \rho_X(x, y)$ для любых $x, y \in M$, является метрическим пространством, называемым **подпространством** пространства (X, ρ_X). Полное метрическое пространство $\widehat{X}$ называется **пополнением** метрического пространства X, если X является подпространством $\widehat{X}$ и X всюду плотно в $\widehat{X}$, т. е. $\widehat{X} = \overline{X}$.

Взаимно однозначное отображение $f : (X, \rho_X) \to (Y, \rho_Y)$ называется **изометрией**, если $\rho_X(x, y) = \rho_Y(f(x), f(y))$ для любых $x, y \in X$. Метрические пространства называются **изометричными**, если между ними существует изометрия.

Теорема 1. *Любые два пополнения метрического пространства изометричны.*

Одной из характеристик полного метрического пространства является следующая теорема.

Теорема 2 (о вложенных шарах). *Метрическое пространство является полным тогда и только тогда, когда любая последовательность вложенных друг в друга замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю, имеет общую точку.*

Пример. *Доказать полноту пространств:*

а) $\mathbb{R}^n$;

б) $C[a; b]$.

Решение

а) Пусть $x^{(k)} = \left(x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}\right) \in \mathbb{R}^n$ и $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ — некоторая фундаментальная последовательность в $\mathbb{R}^n$. Это означает, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное число $N = N(\varepsilon)$, что для любых $k, m > N$ выполняется неравенство

$$\rho(x^{(k)}, x^{(m)}) = \|x^{(k)} - x^{(m)}\| = \left(\sum_{j=1}^{n} \left(x_j^{(k)} - x_j^{(m)}\right)^2\right)^{1/2} < \varepsilon.$$

Отсюда следует, что для любых $k, m > N$

$$\sum_{j=1}^{n} \left(x_j^{(k)} - x_j^{(m)}\right)^2 < \varepsilon^2.$$

Тогда для каждого $j = 1, \ldots, n$ и для всех $k, m > N$ выполняется

$$|x_j^{(k)} - x_j^{(m)}| < \varepsilon.$$

Таким образом, для каждого j числовая последовательность $\{x_j^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ является фундаментальной. А так как всякая фундаментальная числовая последовательность сходится, то существует $\lim\limits_{k\to\infty} x_j^{(k)}$. Обозначим

$$x_j = \lim_{k\to\infty} x_j^{(k)}$$

и положим $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$. Тогда очевидно $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = x$.

Таким образом, пространство $\mathbb{R}^n$ полно.

б) Пусть $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ — фундаментальная последовательность в $C[a;b]$. Покажем, что эта последовательность сходится.

Так как $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность в $C[a;b]$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует натуральное число $N = N(\varepsilon)$, такое, что для любых $n, m > N$ выполняется неравенство

$$\rho(x_n, x_m) = \|x_n - x_m\| = \max_{t\in[a;b]} |x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon.$$

Это означает, что для каждого $t \in [a;b]$ и $n, m > N$

$$|x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon.$$

Пользуясь критерием Коши равномерной сходимости последовательности функций, получим, что последовательность $\{x_n(t)\}$ сходится равномерно на $[a;b]$. Как известно, ее предел $x(t)$ в этом случае будет непрерывной функцией. Устремляя в последнем неравенстве m к ∞, получим

$$|x_n(t) - x(t)| \le \varepsilon \text{ для всех } t \in [a;b] \text{ и для всех } n > N,$$

причем $x(t) \in C[a;b]$. А это и означает, что $\{x_n(t)\}$ сходится к $x(t)$ в смысле метрики пространства $C[a;b]$.

Таким образом, пространство $C[a;b]$ полно.

Задачи

5.1. Доказать, что s — полное метрическое пространство.

5.2. Доказать, что l_∞ — полное метрическое пространство.

5.3. Пусть нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ в линейном пространстве X эквивалентны. Доказать, что нормированное пространство $(X, \|\cdot\|_1)$ полно тогда и только тогда, когда полно линейное нормированное пространство $(X, \|\cdot\|_2)$.

5.4. Доказать, что пространство $C_1[a;b]$ не является полным.

5.5. Доказать, что пространство $C_2[a;b]$ не является полным.

5.6. Доказать полноту пространства l_p.

5.7. Доказать полноту пространства $L_p[a;b]$.

5.8. Является ли полным пространство $P[0;1]$ всех многочленов на $[0;1]$ с метрикой пространства $C[a;b]$? Если нет, найти его пополнение.

5.9. Какой вид имеют фундаментальные последовательности в пространстве с дискретной метрикой X_d?

5.10. Является ли полным пространство с дискретной метрикой X_d?

5.11. Какой вид имеют фундаментальные последовательности в пространстве $\mathbb{N}$ с метрикой из приложения 1?

5.12. Является ли полным пространство из задачи 5.11?

5.13. Показать, что если опустить одно из условий:

а) полноту пространства,

б) замкнутость шаров,

в) стремление к нулю радиусов шаров,

г) вложенность шаров друг в друга,

то теорема о вложенных шарах перестанет быть верной.

5.14. Что можно сказать о полноте пространств (X, ρ_i), $i = 1$, 2, 3, с метриками задачи 1.10?

5.15. Каким условиям должна удовлетворять определенная на $\mathbb{R}$ непрерывная функция $u = f(v)$, чтобы на $\mathbb{R}$ можно было задать метрику формулой

$$\rho(x, y) = |f(x) - f(y)|$$

и в этой метрике пространство было полным?

5.16. Пусть $x_n \in X$ – фундаментальная последовательность, x_{n_k} – ее сходящаяся подпоследовательность. Доказать, что последовательность x_n сходится к тому же пределу, что и подпоследовательность.

5.17. Пусть $x_n \in X$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_{n+1} - x_n\|$ сходится. Доказать, что x_n – фундаментальная последовательность. Верно ли обратное?

5.18. Пусть $x_n,\ y_n \in X$ – фундаментальные последовательности. Доказать, что последовательность $\lambda_n = \|x_n - y_n\|$ сходится.

5.19. Будет ли полным метрическое пространство $\mathbb{R}$ с метриками:

а) $\rho(x, y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$;

б) $\rho(x, y) = |e^x - e^y|$;

в) $\rho(x, y) = |x^3 - y^3|$?

Если нет, найти пополнение.

6. Принцип сжимающих отображений

Отображение $y = Ax$ метрического пространства (X, ρ) в метрическое пространство (Y, d) называется **сжимающим**, если существует такое число $\alpha \in (0; 1)$, что для любых $x, y \in X$ выполняется неравенство

$$d(Ax, Ay) \leq \alpha\rho(x, y).$$

Точка x пространства X называется **неподвижной точкой** отображения A, если $Ax = x$. Очевидно, что неподвижная точка x отображения A представляет собой решение уравнения $Ax = x$.

Сформулируем теорему, которая лежит в основе метода, позволяющего доказывать существование и единственность решений различных уравнений.

Теорема Банаха (принцип сжимающих отображений). *Всякое сжимающее отображение $A : X \to X$, определенное в полном метрическом пространстве X, имеет единственную неподвижную точку.*

Теорема Банаха гарантирует не только существование и единственность в данных условиях решения уравнения $Ax = x$, но и дает метод построения этого решения (**метод последовательных приближений**). Этот метод заключается в следующем: пусть X — полное пространство, $A : X \to X$ — сжимающее отображение. Возьмем произвольную точку $x_0 \in X$ и построим сходящуюся последовательность $\{x_n\}$ следующим образом:

$$x_1 = Ax_0,$$

$$x_2 = Ax_1,$$

$$\ldots$$

$$x_n = Ax_{n-1},$$

$$\dots$$

Ее предел и является решением уравнения $Ax = x$.

Пример. *В пространстве $C[0;1]$ решить интегральное уравнение*

$$x(t) = \frac{1}{3}\int\limits_0^1 tx(s)\,ds + 1.$$

Решение. Обозначим

$$Ax(t) = \frac{1}{3}\int\limits_0^1 tx(s)\,ds + 1.$$

Заметим, что отображение A действует в пространство $C[0,1]$. Таким образом, задача сводится к решению уравнения $x = Ax$ в пространстве $C[0,1]$, т. е. к нахождению неподвижной точки отображения $A : C[0,1] \to C[0,1]$.

Покажем, что отображение A является сжимающим. Рассмотрим

$$|Ax(t) - Ay(t)| = \frac{1}{3}\left|\int\limits_0^1 t(x(s) - y(s))\,ds\right|.$$

Используя известное свойство интеграла, получим, что последнее выражение не превосходит величины

$$\frac{1}{3}\int\limits_0^1 t|x(s) - y(s)|\,ds \leqslant \frac{1}{3}\int\limits_0^1 \max_{t\in[0;1]} t \cdot \max_{s\in[0;1]} |x(s) - y(s)|\,ds =$$

$$= \frac{1}{3}\|x - y\|\int\limits_0^1 ds = \frac{1}{3}\rho(x,y).$$

Таким образом, для любого $t \in [0;1]$

$$|Ax(t) - Ay(t)| \leqslant \frac{1}{3}\rho(x,y).$$

Значит, для любых $x, y \in C[0;1]$ выполняется неравенство

$$\rho(Ax, Ay) = \max_{t\in[0;1]} |Ax(t) - Ay(t)| \leqslant \frac{1}{3}\rho(x,y).$$

Следовательно, отображение A является сжимающим.

Будем искать решение методом последовательных приближений. Возьмем произвольный элемент $x_0 \in C[0;1]$ и построим сходящуюся последовательность $\{x_n\}$ приближенных решений уравнения $Ax = x$. Пусть $x_0 = x_0(t) \equiv 0$, тогда

$$x_1 = A(x_0) = \frac{1}{3}\int\limits_0^1 t\cdot 0\,ds + 1 = 1;$$

$$x_2 = A(x_1) = \frac{1}{3}\int\limits_0^1 t\cdot 1\,ds + 1 = \frac{t}{3} + 1;$$

$$x_3 = A(x_2) = \frac{1}{3}\int\limits_0^1 t\cdot\left(\frac{s}{3}+1\right)\,ds + 1 = \frac{t}{3}\left(\frac{1}{6}+1\right) + 1 = t\left(\frac{1}{3\cdot 6}+\frac{1}{3}\right)+1;$$

$$x_4 = A(x_3) = \frac{t}{3}\int\limits_0^1 \left(s\left(\frac{1}{3\cdot 6}+\frac{1}{3}\right)+1\right)\,ds + 1 = t\left(\frac{1}{3\cdot 6^2}+\frac{1}{3\cdot 6}+\frac{1}{3}\right)+1;$$

$\ldots$

$$x_n = A(x_{n-1}) = \frac{t}{3}\left(\frac{1}{6^{n-2}}+\frac{1}{6^{n-3}}+\cdots+1\right)+1 = \frac{t}{3}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{6}}\right)+1.$$

Найдем предел этой последовательности:

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t) = \frac{t}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{6}}\right)+1 = t\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{5}\right)+1 = \frac{2}{5}t+1.$$

Таким образом, $x(t) = \dfrac{2}{5}t + 1$ — единственное решение уравнения.

Задачи

6.1. В пространстве $C[0;1]$ решить интегральные уравнения:

а) $x(t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 tsx(s)\,ds + \frac{5}{6}t$;

б) $x(t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 ts^2x(s)\,ds + 1$;

в) $x(t) = \frac{1}{3}\int\limits_0^1 e^{t-s}x(s)\,ds + 1$;

г) $x(t) = \lambda\int\limits_0^t x(s)\,ds + 1$ при $|\lambda| < 1$;

д) $x(t) = \frac{1}{5}\int\limits_0^1 e^{t}x(s)\,ds + 1$;

е) $x(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 \sin\pi s\cdot x(s)\,ds + \cos\pi t$.

6.2. Показать, что в теореме Банаха условие

$$\rho(Ax, Ay) \le \alpha\rho(x, y), \quad \alpha < 1,$$

нельзя заменить одним из более слабых условий:

а) $\rho(Ax, Ay) \le \rho(x, y)$;

б) $\rho(Ax, Ay) < \rho(x, y)$.

6.3. Доказать обобщенный принцип сжимающих отображений: если $A : X \to X$, X – полное пространство, отображение $A^n = \underbrace{A\ldots A}_{n}$ является сжимающим, то A имеет единственную неподвижную точку.

6.4. Доказать, что последовательность цепных дробей

$$2,\ 2+\frac{1}{2},\ 2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}},\ 2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}},\dots$$

является сходящейся, и найти ее предел.

7. Гильбертовы пространства

Линейное пространство X над числовым полем $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) называется **пространством со скалярным произведением**, если каждой паре его элементов x, y поставлено в соответствие число из поля $\mathbb{K}$, обозначаемое (x, y) и называемое **скалярным произведением**, для любых $x, y, z \in X$ удовлетворяющее условиям:

1) $(x, x) \geq 0$, $(x, x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = \theta$;
2) $(x, y) = \overline{(y, x)}$ (черта означает комплексное сопряжение);
3) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$ для любого $\lambda \in \mathbb{K}$;
4) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$.

Если $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, то X называют **евклидовым** пространством, если $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ — **унитарным** пространством.

В пространстве X со скалярным произведением верно *неравенство Коши — Буняковского — Шварца*

$$|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y) \quad \forall\ x, y \in X,$$

из которого следует, что в X можно ввести *норму* равенством

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}.$$

Эту норму будем называть нормой, порожденной заданным скалярным произведением.

Пространство H со скалярным произведением называется **гильбертовым**, если оно является полным по отношению к этой норме.

Теорема. *Для того чтобы нормированное пространство X было пространством со скалярным произведением, необходимо и достаточно, чтобы для любых двух его элементов x и y выполнялось равенство параллелограмма*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

Углом между ненулевыми элементами x и y вещественного гильбертова пространства называется угол φ, заключенный между 0 и π, такой, что $\cos\varphi = \dfrac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|}$.

Элементы $x, y \in H$ называют **ортогональными** и записывают $x \perp y$, если $(x, y) = 0$.

Говорят, что элемент $x \in H$ **ортогонален** некоторому **множеству** $L \subset H$, и пишут $x \perp L$, если x ортогонален каждому элементу из L, т. е. для любого $y \in L$ выполняется равенство $(x, y) = 0$. Множество всех элементов $x \in H$, ортогональных данному множеству $L \subset H$, обозначается $L^{\perp}$ и называется **ортогональным дополнением** множества L.

Система ненулевых элементов $h_1, h_2, \ldots \in H$ называется **ортогональной**, если $(h_j, h_k) = 0$ при $j \neq k$, и **ортонормированной**, если

$$(h_j, h_k) = \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{при } j = k; \\ 0 & \text{при } j \neq k. \end{cases}$$

Система элементов $x_1, x_2, \ldots \in H$ называется **линейно независимой**, если при любом натуральном n система $x_1, x_2, \ldots, x_n$ линейно независима, т. е. линейная комбинация $c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$, где $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}$, равна нулевому элементу пространства H тогда и только тогда, когда $c_1 = \ldots = c_n = 0$.

Задачи

7.1. Доказать, что $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$ являются гильбертовыми пространствами.

7.2. В каких из перечисленных пространств можно ввести скалярное произведение, согласующееся с нормой этого пространства: c, c_0, l_2, $C^{(n)}[0; 1]$, $L_2[a; b]$?

7.3. Доказать, что в пространстве l_p $(p \neq 2)$ нельзя ввести скалярное произведение, согласующееся с нормой этого пространства.

7.4. Показать, что в пространстве $L_p[a; b]$ $(p \neq 2)$ нельзя ввести скалярное произведение, согласующееся с нормой этого пространства.

7.5. Доказать, что условие $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$ в определении скалярного произведения можно заменить на более слабое условие $(x, x) = 0 \Rightarrow x = \theta$.

7.6. Доказать, что в евклидовом пространстве $x \perp y$ тогда и только тогда, когда $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

7.7. Проверить, что в евклидовом пространстве выполняется теорема косинусов

$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\|\|y\| \cos\widehat{x,y}.$$

7.8. Доказать, что равенство в неравенстве Коши — Буняковского выполняется тогда и только тогда, когда x и y линейно зависимы.

7.9. Доказать, что в гильбертовом пространстве справедливо *поляризационное тождество*

$$4(x,y) = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2.$$

7.10. Доказать, что в пространстве со скалярным произведением для любых элементов x, y, z имеет место *тождество Апполония*

$$\|z-x\|^2 + \|z-y\|^2 = \frac{1}{2}\|x-y\|^2 + 2\left\|z - \frac{x+y}{2}\right\|^2.$$

7.11. Пусть X — линейное нормированное пространство и для любых его элементов x и y выполняется равенство параллелограмма. Доказать, что следующие формулы задают в X скалярное произведение, согласующееся с нормой в X: а) если X — вещественное пространство, то

$$(x,y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right);$$

б) если X — комплексное пространство, то

$$(x,y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) - \frac{i}{4}\left(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2\right).$$

7.12. Доказать, что в пространстве со скалярным произведением элементы x и y ортогональны тогда и только тогда, когда для любых $\lambda,\ \mu \in \mathbb{K}$ выполняется равенство

$$\|\lambda x\|^2 + \|\mu y\|^2 = \|\lambda x + \mu y\|^2.$$

7.13. Пусть $x_1, x_2, \ldots$ и $y_1, y_2, \ldots$ – *биортогональные системы* в H, т. е. такие системы, что

$$(x_j, y_k) = \begin{cases} 1, & \text{если } j = k; \\ 0, & \text{если } j \neq k. \end{cases}$$

Доказать, что каждая из этих систем линейно независима.

7.14. Доказать, что в линейном пространстве непрерывных на $[0; +\infty)$ функций $x(t)$, таких, что сходится интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} |x(t)|^2 e^{-t}\, dt,$$

функционал $(x, y) = \int\limits_0^{+\infty} x(t)\overline{y(t)} e^{-t}\, dt$ задает скалярное произведение.

7.15. Найти угол φ между элементами $x(t) = \sin t$ и $y(t) = t$ в пространстве $L_2[0; \pi]$.

7.16. В пространстве $L_2[-1; 1]$ найти углы треугольника, вершинами которого являются $x_1(t) \equiv 0$, $x_2(t) \equiv 1$ и $x_3(t) = t$.

7.17. Провести ортогонализацию линейно независимой системы 1, t, t^2 в пространстве из задачи 7.14.

7.18. Провести ортогонализацию элементов $x_0(t) \equiv 1$, $x_1(t) = t$, $x_2(t) = t^2$ в пространствах:

а) $L_2[-1; 1]$; б) $L_2[0; 1]$.

7.19. Проверить, что система элементов является ортонормированной в $L_2[0; 2\pi]$:

а) $\left\{ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int} \right\}_{n=-\infty}^{\infty}$;

б) $\left\{ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\left(n-\frac{1}{2}\right)t} \right\}_{n=-\infty}^{\infty}$;

в) $\left\{ \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \cos\left(\left(n-\dfrac{1}{2}\right)t\right), \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \sin\left(\left(n-\dfrac{1}{2}\right)t\right) \right\}_{n=1}^{\infty}$.

7.20. Доказать, что система элементов является ортонормированной в $L_2[0;\pi]$:

а) $\left\{ \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \sin nt \right\}_{n=1}^{\infty}$;

б) $\left\{ \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \sin\left(n-\dfrac{1}{2}\right)t \right\}_{n=1}^{\infty}$;

в) $\left\{ \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}, \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \cos nt \right\}_{n=1}^{\infty}$;

г) $\left\{ \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \cos\left(n-\dfrac{1}{2}\right)t \right\}_{n=1}^{\infty}$.

8. Наилучшее приближение

Пусть (X, ρ) — метрическое пространство.

Расстоянием от точки $x \in X$ **до множества** $M \subset X$ называется число

$$\rho(x, M) = \inf_{y \in M} \rho(x, y).$$

Пусть $x \in X$. Если существует такой элемент $x^* \in M$, что $\rho(x, M) = \rho(x, x^*)$, то x^* называется **элементом наилучшего приближения** x элементами множества M.

Теорема 1 (об элементе наилучшего приближения в гильбертовом пространстве). *Пусть H — гильбертово пространство, $M \subset H$ — замкнутое выпуклое множество. Тогда для любого элемента $x \in H$ существует единственный элемент наилучшего приближения элементами из M.*

Для нахождения элемента наилучшего приближения в гильбертовом пространстве удобно пользоваться следующей теоремой:

Теорема 2 (о разложении элемента на проекции). *Пусть M— замкнутое линейное подпространство гильбертова пространства H, тогда любой элемент $x \in H$ единственным образом представим в виде $x = x' + x''$, где $x' \in M$, $x'' \in M^{\perp}$. При этом $\rho(x, M) = \|x - x'\| = \|x''\|$.*

Элементы x', x'' называются проекциями элемента x на M и $M^{\perp}$ соответственно. Таким образом, x' и будет элементом наилучшего приближения x элементами $M \subset H$.

Для банахова пространства теорема 1 уже неверна.

Задачи

8.1. Пусть X — линейное нормированное пространство, L — замкнутое подпространство X, $x \in X$, $y \in L$. Доказать, что $\rho\,(x, L) = \rho\,(x + y, L)$.

8.2. Пусть X — евклидово пространство, $x, y \in X$. Доказать, что функция $\varphi(t) = \|x - ty\|$ достигает своей точной нижней грани на $\mathbb{R}$.

8.3. Доказать, что в пространстве c^2 множество элементов наилучшего приближения элемента $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ элементами подпространства $L = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$ имеет вид $x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix}$, при $\beta \in [-1, 1]$.

8.4. В пространстве $C[0,1]$ рассмотрим подпространство $L = \{x(t) \in C[0,1] : x(0) = 0\}$. Пусть $x(t) \equiv 1$. Описать множество элементов наилучшего приближения x элементами множества L.

8.5. В пространстве $C[0,1]$ найти расстояние от элемента $x(t) = t$ до подпространства постоянных функций.

8.6. В пространстве $L_2[0;1]$ найти расстояние от элемента $x(t) = t^n$ до множества

$$L = \left\{ x(t) \in L_2[0;1] : \int_0^1 x(t)dt = 0 \right\}.$$

8.7. В пространстве l_2 найти расстояние от элемента $x = (1, 0, 0, ...)$ до подпространства

$$L = \left\{ x \in l_2, x = (x_1, x_2, ...) : \sum_{k=1}^{n} x_k = 0 \right\}.$$

8.8. В пространстве $L_2[0;1]$ найти расстояние от элемента $x(t) = t^2$ до подпространства P_1 всех линейных функций. Найти элемент наилучшего приближения x в P_1.

Ответы

1.4. Нет.

1.7. Да.

1.8. **а)** нет, **б)** да.

1.9. Да.

1.13. Функция f должна быть строго монотонной.

1.14. Нет.

1.15. **2)** нет, **3)** нет.

1.16. Нет.

2.5. **а)** да, **б)** нет, **в)** да, **г)** нет, **д)** да, **е)** нет, **ж)** да, **з)** нет, **и)** нет, **к)** нет, **л)** нет.

2.6. **а)** да, **б)** нет, **в)** да, **г)** нет, **д)** нет, **е)** да, **ж)** да, **з)** да.

2.7. Нет.

2.8. **а)** да, **б)** да.

2.9. Нет.

2.10. Если $\alpha \neq 0$ и $\alpha > -\frac{1}{p}$, то $\|x(t)\| = (\alpha p + 1)^{-1/p}$. При $\alpha = 0$ $\|x(t)\| = 1$. В остальных случаях $x(t) \notin L_p[0;1]$.

3.1. Если $C = (x, y)$ — центр шара и $r \geqslant 0$, то:
а) $B[C, r]$ $(B(C, r))$ — замкнутый (открытый) круг на плоскости с центром в точке C радиусом r;
б) $B[C, r]$ $(B(C, r))$ — замкнутый (открытый) квадрат на плоскости с вершинами в точках $(x - r, y)$, $(x + r, y)$, $(x, y - r)$ и $(x, y + r)$;
в) $B[C, r]$ $(B(C, r))$ — замкнутый (открытый) квадрат на плоскости с вершинами в точках $(x-r, y-r)$, $(x+r, y-r)$, $(x-r, y+r)$ и $(x + r, y + r)$.

3.2. Если $x(t) \in C[a; b]$ и $r \geqslant 0$, то $B(x, r)$ — множество непрерывных на отрезке $[a; b]$ функций, графики которых лежат в мно-

жестве $M = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : t \in [a; b],\quad x(t) - r < y < x(t) + r\}$;
$B[x, r]$ — множество непрерывных на отрезке $[a; b]$ функций, графики которых лежат в следующем множестве: $M = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : t \in [a; b],\quad x(t) - r \leqslant y \leqslant x(t) + r\}$.

3.3. Если $0 \leqslant r < 1$, то $B[x, r] = x$; если $r \geqslant 1$, то $B[x, r] = X_d$;
если $0 \leqslant r \leqslant 1$, то $B(x, r) = x$; если $r > 1$, то $B(x, r) = X_d$.

3.4. Каждое множество является открытым; каждое множество является замкнутым.

3.5. Да.

3.7. Нет.

3.14. Не всегда.

3.15. Да.

3.16. Да.

3.17. Да.

3.18. Нет.

3.19. Да.

3.23. **а)** нет, **б)** да, **в)** да, **г)** да, **д)** да, **е)** да, **ж)** да, **з)** нет, **и)** да, **к)** да, **л)** нет, **м)** да, **н)** нет, **о)** да.

4.1. **а)** равномерная сходимость на $[a; b]$;
б) равномерная сходимость на $[a; b]$ производных порядка $k = 1, \ldots, n$;
в) покоординатная сходимость, равномерная относительно номера координаты;
г) покоординатная сходимость.

4.5. **а)**, **б)** сходится к $x(t) \equiv 0$.

4.6. Во всех указанных пространствах сходится к $(0, 0, \ldots)$.

4.7. Не сходится.

4.8. **а)** в l_p, l_∞ не сходится, в s сходится к $(1, 2, 3, \ldots)$;
б) в l_p, l_∞ не сходится, в s сходится к $(1, 1, \ldots)$;
в) в l_1 не сходится, в l_p $(p > 1)$, l_∞, s сходится к $(0, 0, \ldots)$;
г) при $\alpha = 1$ см. в); при $\alpha < 0$ расходится в каждом пространстве; при $\alpha > 0$ сходится к $(0, 0, \ldots)$ в l_p при $p > \frac{1}{\alpha}$, в l_∞ и в s.

4.9. Не сходится.

4.10. **а)** в l_p $p > 1$ и c_0 сходится к $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right)$; в l_1 не сходится;
б) в c_0 сходится к $\left(\frac{1}{\ln 2}, \frac{1}{\ln 3}, \ldots\right)$; в l_p расходится.

4.11. **а)** не сходится;
б) не сходится;
в) сходится к $x(t) = \frac{\sqrt[5]{t}}{2}$.

5.8. Нет, пополнение изоморфно $C[0;1]$.

5.9. Начиная с некоторого номера N элементы последовательности совпадают.

5.10. Да.

5.11. Начиная с некоторого номера N элементы последовательности совпадают.

5.12. Да.

5.14. Пространство (X, ρ_i), $i = 1, 2, 3$, является полным, если (X, ρ) — полное.

5.15. f должна быть биекцией между $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}$.

5.19. **а)** не является полным, пополнение изоморфно $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;
б) не является полным, пополнение изоморфно $[0; +\infty)$;
в) полное.

6.1. **а)** $x(t) = t$;
б) $x(t) = 1 + \frac{4}{21}t$;
в) $x(t) = 1 + (e^{t-1} - e^t)/2$;
г) $x(t) = e^{\lambda t}$;
д) $x(t) = 1 + \frac{e^t}{6-e}$;
е) $x(t) = cos\pi t$.

6.4. $1 + \sqrt{2}$.

7.2. В l_2 и $L_2[a;b]$.

7.15. $\varphi = \arccos \frac{\sqrt{6}}{\pi}$.

7.16. $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$, $\varphi_2 = \frac{\pi}{3}$, $\varphi_3 = \frac{\pi}{6}$.

7.17. $e_1(t) = 1$, $e_2(t) = t - 1$, $e_3(t) = \frac{1}{26}(t^2 - 6t - 2)$.

7.18. **а)** $e_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $e_2(t) = \sqrt{\frac{3}{2}}\, t$, $e_3(t) = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\left(t^2 - \frac{1}{3}\right)$;
б) $e_1(t) = 1$, $e_2(t) = 2\sqrt{3}(t - \frac{1}{2})$, $e_3(t) = 3\sqrt{10}\left(t^2 - t + \frac{1}{6}\right)$.

8.4. $\{x^*(t) \in C[0;1] :\ x^*(0) = 0,\ 0 \leqslant x^*(t) \leqslant 2,\ t \in [0;2]\}$.

8.5. $\frac{1}{2}$.

8.6. $\frac{1}{n+1}$.
8.7. $\frac{1}{\sqrt{n}}$.
8.8. $\rho(x, P_1) = \frac{\sqrt{96}}{3\sqrt{10}}$, $x^*(t) = t - \frac{1}{6}$.

Предметный указатель

Список литературы

1. Антоневич А. Б. Задачи и упражнения по функциональному анализу / А. Б. Антоневич, П. Н. Князев, Я. В. Радыно. — М. : КомКнига, 2006.
2. Бородин П. А. Задачи по функциональному анализу : в 2 ч. / П. А. Бородин, А. М. Савчук, И. А. Шейпак. — М. : Изд-во ЦПИ, 2009.
3. Ганенкова Е. Г. Функциональный анализ / Е. Г. Ганенкова, К. Ф. Амозова. — Изд-во ПетрГУ, 2011.
4. Городецкий В. В. Методы решения задач по функциональному анализу / В. В. Городецкий, Н. И. Нагнибида, П. П. Настасиев. — М. : Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010.
5. Канторович Л. В. Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. — М. : Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1984.
6. Кириллов А. А. Теоремы и задачи функционального анализа / А. А. Кириллов, А. Д. Гвишиани. — М. : Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1979.
7. Колмогоров А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. — М. : Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1976.
8. Очан Ю. С. Сборник задач по математическому анализу: Общая теория множеств и функций / Ю. С. Очан. — М. : Просвещение, 1981.

9. Пугачев В. С. Лекции по функциональному анализу / В. С. Пугачев. — М. : Изд-во МАИ, 1996.
10. Треногин В. А. Задачи и упражнения по функциональному анализу / В. А. Треногин, Б. М. Писаревский, Т. С. Соболева. — М. : Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1984.
11. Треногин В. А. Функциональный анализ / В. А. Треногин. — М. : Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1980.

Приложения

Приложение 1. Основные метрические пространства

<table>
<tr><th>Пространство</th><th>Описание</th><th>Метрика</th></tr>
<tr><td>X_d</td><td>Пространство с дискретной метрикой — произвольное множество X с метрикой $d(x, y)$</td><td>Для $x, y \in X$
$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = y, \\ 1, & \text{если } x \neq y \end{cases}$</td></tr>
<tr><td>s</td><td>Пространство всех числовых последовательностей $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, $x_k \in \mathbb{R}$ (или $x_k \in \mathbb{C}$)</td><td>Для $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, $y = \{y_k\}_{k=1}^{\infty} \in s$
$\rho(x, y) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^k} \dfrac{\lvert x_k - y_k \rvert}{1 + \lvert x_k - y_k \rvert}$</td></tr>
<tr><td>B_0</td><td>Пространство числовых последовательностей $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, $x_k \in \mathbb{N}$</td><td>Для $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, $y = \{y_k\}_{k=1}^{\infty} \in B_0$
$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = y, \\ \frac{1}{k}, & \text{если } x \neq y, \end{cases}$
где k — номер первой координаты, для которой $x_k \neq y_k$</td></tr>
<tr><td>$\mathbb{N}$</td><td>Пространство натуральных чисел</td><td>Для $x, y \in \mathbb{N}$
$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = y, \\ 1 + \frac{1}{x+y}, & \text{если } x \neq y \end{cases}$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Из любого нормированного пространства можно получить метрическое введением метрики $\rho(x, y) = \lVert x - y \rVert$</td></tr>
</table>

Приложение 2. Основные нормированные пространства

Прост-ранство	**Описание**	**Норма**
$\mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$	n-мерное пространство векторов $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{R}$ (или $x_i \in \mathbb{C}$), $i = 1, \ldots, n$	$\Vert x\Vert = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \vert x_i\vert^2\right)^{1/2}$
l_p	Пространство последовательностей $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, таких, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \vert x_k\vert^p < \infty$, где $1 \leq p < \infty$	$\Vert x\Vert = \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} \vert x_k\vert^p\right)^{1/p}$
l_∞	Пространство ограниченных числовых последовательностей $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, т. е. таких, что $\sup\limits_i \vert x_i\vert < \infty$	$\Vert x\Vert = \sup\limits_i \vert x_i\vert$
c	Пространство сходящихся последовательностей $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$	$\Vert x\Vert = \sup\limits_i \vert x_i\vert$
c_0	Пространство последовательностей $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, сходящихся к нулю, т. е. таких, что $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = 0$	$\Vert x\Vert = \max\limits_i \vert x_i\vert$
c^n	Пространство векторов $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_i \in \mathbb{R}$ (или $x_i \in \mathbb{C}$), $i = 1, \ldots, n$	$\Vert x\Vert = \max\limits_i \vert x_i\vert$
$C[a;b]$	Пространство непрерывных на отрезке $[a;b]$ функций $x = x(t)$	$\Vert x\Vert = \max\limits_{t\in[a;b]} \vert x(t)\vert$;
$C_p[a;b]$	Пространство непрерывных на отрезке $[a;b]$ функций $x = x(t)$ с нормой $\Vert\cdot\Vert_p$, где $1 \leq p < \infty$	$\Vert x\Vert = \left(\int\limits_a^b \vert x(t)\vert^p dt\right)^{1/p}$

Пространство	**Описание**	**Норма**
$C[a;+\infty)$	Пространство функций $x = x(t)$, непрерывных на промежутке $[a;+\infty)$, для которых $\sup\limits_{t\in[a;+\infty)} \lvert x(t)\rvert < +\infty$	$\lVert x\rVert = \sup\limits_{t\in[a;+\infty)} \lvert x(t)\rvert$
$C^{(n)}[a;b]$	Пространство n раз непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a;b]$ функций $x = x(t)$	$\lVert x\rVert = \sum\limits_{k=0}^{n} \max\limits_{t\in[a;b]} \lvert x^{(k)}(t)\rvert$
$L_p[a;b]$	Пространство классов эквивалентных функций $x = x(t)$, суммируемых по Лебегу со степенью p на $[a;b]$, где $1 \leq p < \infty$, т. е. таких, что $\int\limits_a^b \lvert x(t)\rvert^p dt < \infty$	$\lVert x\rVert = \left(\int\limits_a^b \lvert x(t)\rvert^p dt\right)^{1/p}$
$L_\infty[a;b]$	Пространство классов эквивалентных измеримых функций $x = x(t)$, существенно ограниченных на $[a;b]$	$\lVert x\rVert = \operatorname*{ess\,sup}\limits_{t\in[a;b]} \lvert x(t)\rvert$
$V[a;b]$	Пространство функций $x = x(t)$ с ограниченной на $[a;b]$ вариацией	$\lVert x\rVert = \lvert x(a)\rvert + \mathop{\mathbf{V}}\limits_a^b x(t)$, где $\mathop{\mathbf{V}}\limits_a^b x(t)$ — полная вариация функции $x(t)$ на отрезке $[a;b]$
$H(\triangle)$	Пространство функций $x = x(z)$, аналитических в единичном круге $\triangle$ и непрерывных в $\overline{\triangle}$	$\lVert x\rVert = \max\limits_{\lvert z\rvert=1} \lvert x(z)\rvert$

Приложение 3. Основные гильбертовы пространства

Пространство	**Описание**	**Скалярное произведение**
$\mathbb{R}^n$	n-мерное пространство векторов $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$	Для $x = \{x_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{R}^n$, $y = \{y_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{R}^n$: $(x, y) = \sum\limits_{i=1}^n x_i y_i$
$\mathbb{C}^n$	n-мерное пространство векторов $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \ldots, n$	Для $x = \{x_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{C}^n$, $y = \{y_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{C}^n$: $(x, y) = \sum\limits_{i=1}^n x_i \overline{y}_i$
l_2	Пространство последовательностей $x = \{x_k\}_{k=1}^\infty$, удовлетворяющих условию $\sum\limits_{k=1}^\infty \lvert x_k\rvert^2 < \infty$	Для $x = \{x_k\}_{k=1}^\infty \in l_2$, $y = \{y_k\}_{k=1}^\infty \in l_2$: $(x, y) = \sum\limits_{i=1}^\infty x_i \overline{y}_i$
$L_2[a; b]$	Пространство классов эквивалентных функций $x = x(t)$, суммируемых по Лебегу в квадрате на $[a; b]$, т. е. таких, что $\int\limits_a^b \lvert x(t)\rvert^2 dt < \infty$	Для $x = x(t) \in L_2[a; b]$, $y = y(t) \in L_2[a; b]$: $(x, y) = \int\limits_a^b x(t)\overline{y(t)} dt$

Учебное издание

Ганенкова Екатерина Геннадьевна
Амозова Кира Федоровна

**Функциональный анализ:
основные классы пространств**

*Учебное пособие для студентов
математического факультета*

Редактор *Е. Е. Порывакина*
Компьютерная верстка *Е. Г. Ганенковой, К. Ф. Амозовой*

Издание подготовлено с использованием стилевой опции
RUSBOOKW.STY *Б. М. Широкова*

Подписано в печать 30.11.13. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Уч.-изд. л. 1,5.
Тираж 120 экз. Изд. № 223.

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего профессионального образования
ПЕТРОЗАВОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Отпечатано в типографии Издательства ПетрГУ
185910, г. Петрозаводск, пр. Ленина, 33.