

Лекция 1. Модели и задачи теории риска

Для того, чтобы избавиться от финансовых потерь, связанных с неопределенностью наступления тех или иных событий, заключаются страховые договоры.

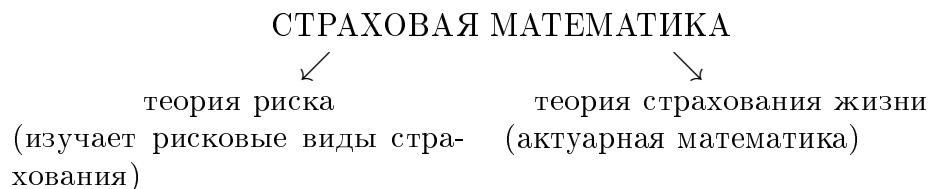
Со стороны страхователя: до заключения договора имел риск, приводящий к некоторым случайным потерям X (а мог и не привести к ним). После заключения – избавил себя от риска, заплатив сумму p страховой компании. Риск не исчез, его приняла на себя страховая компания. Финансовый риск и связанная с ним опасность разорения объективно присутствуют в деятельности любой страховой компании. Оценка этого риска представляет фундаментальный интерес для компании и служит основой принятия важнейших решений.

Риск \Rightarrow страховой компании \Rightarrow оценка риска

Проблема обеспечения финансовой устойчивости страховой компании – комплексная, ее изучение и решение связаны с работой специалистов в различных областях: руководство страховой компании, юристов, экономистов. Однако многие важные задачи носят чисто математический характер. В рамках специальной математической теории – теории риска, разработана система понятий, моделей и методов, которые позволяют количественно оценивать финансовые риски в деятельности страховой компании.

Общематематическая база для ТР – теория вероятностей и математическая статистика.

Условно



В страховании имущества размер ущерба четко определяется в денежном выражении. В страховании жизни страховые компании компенсируют не долю ущерба, а выплачивают заранее оговоренную сум-

му. Проблема оценки человеческой жизни решается самим страхователем. Личное страхование часто напрямую связывается с покупкой в рассрочку, например, дома, квартиры, автомобиля и др. Размер страхового возмещения зависит от стоимости приобретаемого имущества.

ТР входит в квалификационный экзамен актуариев:

экз.1 «Математические основы актуарной науки»;

экз.3 «Актуарные модели»;

экз.4 «Построение актуарных моделей».

Общество актуариев рассматривает ТР как инструмент для решения реальных задач страхового бизнеса, а не как чисто математическую теорию. До сих пор нет общепринятой терминологии на русском языке.

Основные характерные черты ситуаций, связанных с риском

- случайный характер события, при котором возможны несколько исходов;
- наличие альтернативных решений;
- вероятность получения прибыли или возникновения убытков.

Употребление слова «риск»

вероятность получения прибыли или возникновения убытков вероятность возможных потерь, их размер, локализация и т.п. — характеристики рискованной ситуации.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Риск** (франц.), в страховом деле: опасность, от которой производится страхование; иногда размер ответственности страховщика. Страхование м. б. произведено против Р. наступления смерти, пожара, градобития и т. п.*

За Р., который несет страховое учреждение (об-во), страхователь уплачивает страховую премию. Различного рода случайности, сопря-

женные с деятельностью предпринимателя и обусловленные изменчивостью рыночной конъюнктуры.

В переносном смысле: действие наудачу; дело, пред- принятое на счастливую случайность. Рисковать – подвергать себя случайности, опасности.

Малая советская энциклопедия, ОГИЗ РСФСР, Москва, 1932.

Целью страхования является финансовая компенсация последствий случайных событий, повлекших за собой материальный ущерб.

Азартные игры, торговля ценными бумагами не могут быть предметами страхования, так как их участники сознательно идут на риск и ситуация может сложиться в их пользу. Игроки могут не только понести потери, но и выиграть. Таким образом, здесь существует два вида рисков: чистые (пожар, наводнение, кораблекрушение и др.) и спекулятивными. **Предметом интереса страховщиков** являются только чистые риски.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Страховые риски – риски, поступающие от страхователей

Виды страховых рисков

- собственные риски;
- технические;
- инвестиционные;
- нетехнические.

Традиционные модели и задачи ТР

Элементарная составляющая страховщика – **индивидуальный риск** (страховое требование claim), равный итоговой сумме средств, выплаченных по некоторому договору страхования, т. е. это случайная величина, равная нулю, если страховое событие произошло, и не

равное нулю (а равная сумме всех выплат по договору), если произошло хотя бы одно страховое событие.

Убыток – условное значение величины иска при условии, что иск отличен от 0.

Классификация моделей риска

I. Модель индивидуальных потерь (статическая модель страхования)

Описывает ситуацию, в которой

- совокупность объектов сформирована одновременно,
- страховые премии собраны в момент формирования портфеля,
- срок действия всех договоров одинаковый в течении срока могут происходить страховые события, приводящие к страховым выплатам.

Будем считать, что имеется некоторый начальный капитал.

II. Модель коллективного риска (динамическая модель страхования)

– договоры заключаются в моменты времени, образующие некоторый случайный процесс,

– каждый договор имеет свою длительность,

– в течение времени действия договора могут происходить страховые события, приводящие к убыткам страховой компании.

Такая модель может рассматриваться как на конечном, так и на бесконечном интервале времени. Здесь всегда предполагается наличие начального капитала, выделяемого для данного страхового портфеля.

Задачи ТР

I. Вычисление распределения суммарного иска, т. е. суммы всех выплат (убытков) страховщика

– по итогам страховой деятельности по всему портфелю (в рамках индивидуальной модели);

– по итогам страховой деятельности в течение некоторого интервала времени (в рамках коллективной модели).

II. Вычисление (или оценка) страховых премий, обеспечивающих заданную (обычно близкую к 1) вероятность неразорения страховщика.

Цена страхового полиса (страховой премии) должна быть приемлемой как для клиента, так и страховой компании, она должна учитывать различные факторы, в том числе вероятность наступления страхового случая, величину возникающего при этом ущерба и др. Таким образом, при продаже полиса страховая компания должна сделать расчеты по финансовым обязательствам клиента, имея в виду, что она сама выполнит свои обязательства перед ним в будущем, причем в некоторый случайный момент.

Под **разорением** понимается событие, при котором сумма страховых выплат страховщика в некоторый момент времени S больше суммы его начального резерва U и суммы собранных страховых премий

$$P(S > U).$$

Страховая премия — часть полного взноса страхователя (брутто-премии), которая зачисляется в страховой фонд, т.е. в фонд, предназначенный для покрытия будущих страховых выплат

При вычислении вероятности разорения $P(S > U)$

– для *модели индивидуального риска* достаточно рассмотреть итоговые суммы убытков и страховых премий по всему портфелю.

– для *модели коллективного риска* вероятность разорения можно понимать в следующих смыслах:

- 1) можно рассматривать вероятность разорения в данный момент времени, под которой понимается вероятность того, что в данный момент времени сумма убытков $S(t')$ превосходит ве-

личину страхового фонда страховщика U (т.е. начального капитала и собранных премий)

$$P(S(t') > U).$$

- 2) можно рассматривать вероятность разорения на фиксированном конечном интервале времени, под которой понимается вероятность того, что в течение рассматриваемого интервала времени сумма убытков хотя бы 1 раз превзойдет величину страхового фонда страховщика

$$P(S([t', t'']) > U).$$

- 3) можно рассматривать на бесконечном интервале времени, под которой понимается вероятность того, что когда-нибудь сумма убытков превзойдет величину страхового фонда страховщика

$$P(S([t', \infty)) > U).$$

Основные задачи теории ИР

Объект исследования – распределение случайной величины итогового страхового фонда или остатка средств страховой компании по некоторому фиксированному множеству договоров страхования (страховому портфелю):

$$R = r + \sum_{j=1}^N Z_j - \sum_{j=1}^N Y_j, \quad (1)$$

r – начальный капитал страховщика по данному портфелю (или обозначают S),

N – количество договоров страхования (контрактов, полисов), включенных в страховой портфель,

Z_j – часть полной страховой премии (“брутто-премии”), зачисляемой в страховой фонд по j -му договору страхования,

Y_j – полные (за время действия договоров) величины выплат страховщика (индивидуальных исков) по всем договорам портфеля (величина иска может быть равна 0).

$Y_j, j = 1, \dots, N$, – одинаково распределенные независимые случайные величины,

N может быть детерминированной, а может быть случайной,

$Z_j, j = 1, \dots, N$, – неслучайные величины.

Пусть формирование портфеля начинается в момент времени $t = 0$ и имеется конечный момент времени $t = t_0$, к которому формирование портфеля заканчивается. Тогда характер процесса заключения договоров страхования на промежутке $[0, t_0]$ не имеет значения для распределения случайной величины R . При такой постановке игнорируется поведение страхового фонда на $[0, t_0]$. Это имеет смысл в случае когда t_0 мало по сравнению с временем, к которому завершается действие всех договоров страхования. Возможная трактовка этой постановки – страховая компания может получать “краткосрочный” кредит или может использовать собственные сбережения (резервы), если в некоторый момент $t, 0 \leq t \leq t_0$, потребуется произвести страховые выплаты, превышающие накопленный к этому моменту времени страховой фонд.

Наиболее типичная ситуация – $t_0 = 0$.

В литературе внимание обращается на

- явное вычисление распределения суммарного иска при заданных распределениях индивидуальных исков,
- простейшие асимптотические формулы,
- сравнение рисков ситуаций,
- оценивание риска, функций полезности,
- эмпирических принципов выбора страховых взносов.

Критика подхода, связанного с применением аппроксимаций для распределения суммарного иска.

Главный недостаток - недостаточная точность соответствующих приближенных формул и отсутствие приемлемых оценок точности аппроксимации (Bowers).

Использование нормальной аппроксимации для распределения суммарного иска не является идеальным подходом, поскольку реальное распределение обладает положительной асимметрией, которой нет у нормального распределения (Bowers).

Выход — использование, например, «сдвинутого» гамма-распределения

Основные задачи теории КР

Под **процессом риска** мы будем понимать процесс изменения капитала, принадлежащего страховой компании.

Причины изменения капитала:

- 1) он увеличивается благодаря поступлению взносов от клиентов (страховых премий);
- 2) уменьшается из-за страховых выплат.

Страховые премии описываются детерминированной (неслучайной) функцией времени. А процесс страховых выплат – случайный.

Т.о., процесс риска является *стохастическим* процессом.

Основная цель изучения процессов риска – оптимизация параметров деятельности страховых компаний, например, страховых тарифов и/или страховых выплат.

Критерии оптимальности

– определить вероятностное распределение суммарных страховых выплат за рассматриваемый промежуток времени. Зная это распределение, вычислить размер страховых премий, гарантирующий желаемый объем резерва с требуемым уровнем достоверности. Используются методы предельных теорем теории вероятностей.

– вероятность разорения (вероятность того, что процесс риска опустится ниже некоторого уровня в течение определенного промежутка времени (конечного или бесконечного).)

Вероятность разорения рассматривается как функция основных параметров процесса риска.

Основоположники ГР

Э. Ф. Лундберг (1907-1987, шведский экономист) – поставил задачи о нахождении вероятности разорения, дал первые оценки вероятности разорения.

Г. Крамер (1893–1985, шведский математик) - систематическое изучение вероятности разорения, поведение вероятности разорения в зависимости от величины начального капитала.

Для подавляющего большинства моделей отсутствуют явные замкнутые формулы для вероятности разорения. Это приводит к необходимости построения различных аппроксимаций.

Возможные аппроксимации:

– формулы, приближающие вероятность разорения с помощью асимптотических выражений (например, формула Крамера-Лундберга). Приближения, основанные на функциональных предельных теоремах

– асимптотические аппроксимации при малой нагрузке безопасности. Приближения, основанные на функциональных предельных теоремах. Однако для большинства таких аппроксимаций отсутствуют оценки их точности, иногда имеют большие относительные погрешности.