Лекция 2. Модели индивидуальных потерь и модели наступления страховых случаев

§1 Модели индивидуальных потерь

В финансовый риск страховой компании входят выплаты по индивидуальным договорам. При заключении некоторых договоров может произойти только один страховой случай (например, при страховании жизни), в других страховых случаев может быть несколько (например, договор ОСАГО). С точки зрения теории риска, нас будет интересовать величина индивидуального убытка X, измеренной в тех или иных денежных единицах.

Если имеем дело с большой однородной группой договоров, то о величине индивидуального убытка можем говорить как о случайной величине X.

В теории риска случайную величину X (описывающую случайные убытки) структурируют.

Ее часто записывают как

$$X = I \cdot Y, \tag{1}$$

где

$$I = \begin{cases} 1, & \text{страх. случай произошел,} \\ 0, & \text{страх. случай не произошел;} \end{cases}$$

Y описывает размер страхового возмещения после наступления страхового случая.

Если за время действия договора может произойти несколько страховых случаев, то

$$X = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_\nu, \tag{2}$$

ν описывает число страховых случаев, которые произошли

за время действия договора,
Y_i, $i = 1, \dots, \nu$, описывают величины страховых возмещений после этих случаев.

Запись величины индивидуального убытка в виде (1) или (2) удобна в том смысле, что она позволяет разделить влияние разных факторов на величину убытка. Как правило, на частоту наступления событий влияют одни факторы, а на величину страхового возмещения влияют другие. Например, вероятность повреждения автомобиля в результате ДТП для начинающих водителей выше, чем для опытных, в тоже время для разных марок авто величины расходов на ремонт будут различными.

Обозначим $m = EY$ – средний размер страхового возмещения или среднюю тяжесть, q – частота наступления события. Величина $EX = P(I = 1) \cdot EY = qm$ описывает ожидаемые потери по договору. Ее называют также чистой премией или нетто-премией. Полная премия состоит из нетто-премии и различных надбавок, в которые входят расходы компании, ее прибыль и др.

В простейших схемах X может принимать конечное число дискретных значений: $b_0 = 0, b_1, \dots, b_n$. Стохастическая природа дискретной сл. в. X описывается распределением вероятностей $p_0 = P(X = b_0), \dots, p_n = P(X = b_n)$. Величина X не может быть непрерывной случайной величиной, поскольку существует $P(X = 0) > 0$. Но величину страхового возмещения Y часто моделируют с помощью непрерывной случайной величины. Стохастическая природа непрерывной сл. в. X описывается функцией распределения

$$F(x) = P(Y < x)$$

или плотностью

$$f(x) = F'(x).$$

Поскольку в приложениях к страхованию $Y > 0$, то $F(x)$, $f(x) \equiv 0$ при $x < 0$. Поэтому всегда будем считать, что $x \geqslant 0$.

Макрохарактеристики индивидуальных потерь:

$m_X = EX$ – среднее значение,

$VarX = EX^2 - (EX)^2$ – дисперсия,

$\sigma_X = \sqrt{VarX}$ – среднее квадратичное отклонение,

$c_X = \frac{\sigma_X}{m_X}$ – коэффициент вариации,

$\gamma_1 = \frac{E(X-m_X)^3}{\sigma_X^3}$ – коэффициент асимметрии,

$\gamma_2 = \frac{E(X-m_X)^4}{\sigma_X^4}$ – коэффициент эксцесса.

Для дискретной сл.в. X с распределением

$$p_0 = P(X = b_0), \ldots, p_n = P(X = b_n):$$

$$EX = \sum_{i=0}^{n} b_i p_i, \qquad EX^2 = \sum_{i=0}^{n} b_i^2 p_i.$$

Для непрерывной сл.в. Y с $F(x) = P(Y < x)$ и $f(x) = F'(x)$:

$$EY = \int_0^\infty x\,dF(x) = \int_0^\infty x f(x)\,dx,$$

$$EY^2 = \int_0^\infty x^2\,dF(x) = \int_0^\infty x^2 f(x)\,dx.$$

§2 Модели наступления страховых случаев

Страховые случаи происходят в непредсказуемые моменты времени. Как неопределенность этих моментов, так и неопределенность величин ущерба являются важными составляющими риска в деятельности страховой компании.

Одним из основных предположений ТР является следующее: процесс наступления страховых случаев и величины ущербов могут и должны изучаться отдельно.

1. Простейшая модель, описывающая наступление страховых случаев,– **биномиальная**, основывается на предположениях:

1) анализируется фиксированный промежуток времени;
2) число договоров N (размер портфеля) фиксировано и неслучайно;
3) по каждому договору за рассматриваемый промежуток времени может произойти только один страховой случай;
4) риски, связанные с договорами, независимы (наступление или ненаступление страхового случая по одному договору не влияет на наступление страховых случаев по другим);
5) договора однородны (вероятность q наступления страхового случая по одному договору за рассматриваемый промежуток времени одна и та же для всех договоров);
6) интересует только общее число ν страховых случаев за рассматриваемый промежуток времени, не важны моменты их наступления.

В этой модели общее число страховых случаев по портфелю ν имеет биномиальное распределение

$$P(\nu = i) = C_N^i q^i p^{N-i}, \qquad p = 1 - q, \qquad i = 0, 1, \ldots, N.$$

Биномиальная модель является статической, она применима только когда рассматриваемый промежуток времени фиксирован заранее. Здесь нет возможности анализа событий по времени их возникновения в пределах рассматриваемого промежутка времени.

В этой модели предполагается, что количество заключенных договоров N велико, а вероятность наступления страхового случая q мала. При этом число страховых случаев $E\nu = N \cdot q$ за рассматриваемый промежуток времени обычно является "средним" по величине числом λ. В такой ситуации биномиальная модель может приближена **пуассоновской** моделью

$$P(\nu = i) \to \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}.$$

2. Динамические модели, в отличие от статистических, позволяют описывать динамику наступления страховых событий во времени, фиксировать время возникновения каждого события. Этот процесс является произвольным точечным процессом $T_1, T_2, \ldots,$ на оси времени. Одной из самых популярных моделей, описывающих данный процесс, является **модель Пуассона**, в которой предполагается, что процесс наступления страховых случаев

1) **стационарный**, т. е. распределение числа страховых случаев за некоторый промежуток времени $\triangle t$ зависит от его длины и не зависит от его положения на оси времени;

2) **ординарный** в том смысле, что наступление двух или более страховых случаев за малый промежуток времени $\triangle t$ практически невозможно;

3) **не обладает последействием**, т. е. случайные величины, выражающие число страховых случаев за непересекающиеся промежутки времени, независимы.

Данные предположения справедливы как для всего портфеля договоров, так для описания наступления страховых случаев от индивидуального договора, если за время действия этого договора может произойти несколько страховых случаев.

Число исков, поступивших в какой-то фиксированный промежуток времени, имеет распределение Пуассона.

Если ν – число поступивших исков, распределенное по Пуассону, то вероятности, соответствующие различным значениям ν, можно получить по формулам

$$p_\nu = p_\nu(\lambda) = \frac{\lambda^\nu}{\nu!} \cdot e^{-\lambda},$$

где $\lambda = M(\nu)$ – параметр Пуассона.

Перечисленные условия данного процесса наступления страховых событий могут иногда нарушаться. Например, условие стационарности может нарушиться при страховании от болезней, поскольку заразные болезни и эпидемии могут привести к связи между исками, поступившими в разные промежутки времени. Условие ординарности может быть нарушено, если были заявлены иски для возмещения ущерба в результате одного ДТП застрахованных в одной страховой компании автомобилей. В этом случае все иски, возникающие в результате одного происшествия, рассматривают как части одного иска. Третье условие чаще всего выполняется, но может быть нарушено, например, в пенсионном страховании, когда выплата может быть произведена при достижении определенного возраста.

Если размер портфеля N достаточно велик, а вероятность наступления страхового случая q мала, но $Nq \to \lambda$, то

$$P(\nu = i) \to \frac{\lambda^i}{i!} \cdot e^{-\lambda}.$$

Сумма $\nu = \nu_1 + \ldots + \nu_m$ независимых переменных Пуассона $\nu_1, \ldots, \nu_m$ имеет распределение Пуассона с параметром Пуассона

$$\lambda = \lambda_1 + \ldots + \lambda_m.$$

Для распределения Пуассона

– математическое ожидание и дисперсия $E\nu = Var\nu = \lambda$,

– среднее квадратичное отклонение $\sigma_\nu = \sqrt{\lambda}$,

– коэффициент асимметрии $\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$,

– коэффициент эксцесса $\gamma_2 = \frac{1}{\lambda}$.

Если обозначим через F кумулятивную функцию распределения пуассоновской переменной k, то

$$F(n) = P(k \leqslant n) = \sum_{i=0}^{n} e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}.$$

Вычисление $F(n)$ для больших значений n вызывает трудности. Для увеличения скорости расчетов с приемлемой точностью необходимы аппроксимирующие формулы.

Важнейшие распределения

1. Вырожденное распределение

Случайная величина X в точке $x = a$ имеет вырожденное распределение, если

$$P(X = a) = 1, \qquad F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant a; \\ 1, & x > a. \end{cases}$$

$$EX = a, \qquad VarX = 0.$$

2. Биномиальное распределение

Случайная величина X в точке $x = a$ имеет биномиальное распределение с параметрами (n, p) $(0 < p < 1,\ n \geqslant 1)$, если

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}, \qquad k = 0, \ldots, n,$$

$$EX = np, \qquad VarX = np(1 - p).$$

3. Распределение Пуассона

Случайная величина X имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda > 0$, если

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}, \qquad k = 0, 1, \ldots.$$

$$EX = VarX = \lambda.$$

4. Отрицательное биномиальное распределение

Случайная величина X имеет отрицательное биномиальное распределение (Паскаля) с параметрами n и p $(n > 0$, $0 < p < 1)$, если

$$P(X = k) = C_{n+k-1}^k p^n (1 - p)^k, k = 0, 1, \ldots.$$

Для $\quad n \notin \mathbb{Z} \qquad C_{n+k-1}^{k} = \dfrac{\Gamma(n+k)}{k!\Gamma(n)}, \qquad \Gamma(r) = \int\limits_{0}^{\infty} e^{-y} y^{r-1}\, dy, \quad r > 0.$

Если $n \in \mathbb{Z}$, то X описывает число испытаний Бернулли, проведенных до достижения ровно n успехов.

$$EX = \frac{n(1-p)}{p}, \qquad VarX = \frac{n(1-p)}{p^2}.$$

5. Геометрическое распределение

Частный случай отрицательного биномиального распределения при $n = 1$.

$$P(X = k) = p(1-p)^k, k = 0, 1, \ldots.$$

6. Равномерное распределение на $[a, b]$

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leqslant x \leqslant b; \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases}$$

$$EX = \frac{a+b}{2}, \qquad VarX = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

7. Нормальное распределение (Гаусса)

Случайная величина X имеет нормальное (гауссово) распределение с параметрами μ и σ^2, $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$ $(X \in N(\mu, \sigma^2))$, если

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

$$EX = \mu, \qquad VarX = \sigma^2.$$

Если $X \in N(0,1)$, то X имеет стандартное нормальное распределение. Для этого распределения $\Phi(x)$ – функция распределения, $\varphi(x)$ – плотность

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\, dt.$$

Если $X \in N(\mu, \sigma^2)$, то

$$P(X < x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

8. Гамма-распределение

Случайная величина X имеет гамма-распределение с параметром формы $\alpha > 0$ и параметром масштаба $\lambda > 0$, если плотность

$$f_X(x) = p(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot e^{-\lambda x} \cdot x^{\alpha-1}, & x \geqslant 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

$$EX = \frac{\alpha}{\lambda}, \qquad VarX = \frac{\alpha}{\lambda^2}.$$

9. Экспоненциальное распределение

Специальный случай гамма-распределения с $\alpha = 1$.

$$f_X(x) = p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geqslant 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

$$EX = \frac{1}{\lambda}, \qquad VarX = \frac{1}{\lambda^2}.$$

10. Распределение Парето

Случайная величина X имеет распределение Парето, если плотность

$$p(x) = \begin{cases} \frac{(ax-b)^\alpha}{(cx-d)^\beta}, & x \geqslant h; \\ 0, & x < h. \end{cases}$$

где $b, d \in R$, $a \geqslant 0$, $c > 0$, $\alpha \geqslant 0$, $\beta > 0$, $h > \frac{c}{d}$.

$$p(x) = \frac{\alpha}{\lambda}\left(\frac{\lambda}{\lambda + x}\right)^{\alpha+1}, \qquad 0 < x < \infty,$$

$$\overline{F}_X(x) \equiv P(X > x) = \left(\frac{\lambda}{\lambda + x}\right)^{\alpha},$$

$$EX = \frac{\lambda}{\alpha - 1}, \qquad VarX = \frac{\lambda^2\alpha}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)},$$

$$\sigma_X = \frac{\lambda}{\alpha - 1}\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha-2}}, \qquad c_X = \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha-2}}.$$

11. Распределение Коши

$$p(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\lambda}{\lambda^2 + (x-a)^2}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

$a \in \mathbb{R}$ – параметр положения (сдвига), $\lambda > 0$ – параметр масштаба.

12. Распределение Лапласа

$$p(x) = \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x-a|}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

$a \in \mathbb{R}$ – параметр положения (сдвига), $\lambda > 0$ – параметр масштаба.