Важнейшие распределения

1. Вырожденное распределение

Случайная величина X в точке $x = a$ имеет вырожденное распределение, если

$$P(X = a) = 1, \qquad F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant a; \\ 1, & x > a. \end{cases}$$

$$EX = a, \qquad VarX = 0.$$

2. Биномиальное распределение

Случайная величина X в точке $x = a$ имеет биномиальное распределение с параметрами (n, p) $(0 < p < 1,\ n \geqslant 1)$, если

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \qquad k = 0, \ldots, n,$$

$$EX = np, \qquad VarX = np(1-p).$$

3. Распределение Пуассона

Случайная величина X имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda > 0$, если

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}, \qquad k = 0, 1, \ldots .$$

$$EX = VarX = \lambda.$$

4. Отрицательное биномиальное распределение

Случайная величина X имеет отрицательное биномиальное распределение (Паскаля) с параметрами n и p $(n > 0,\ 0 < p < 1)$, если

$$P(X = k) = C_{n+k-1}^k p^n (1-p)^k, k = 0, 1, \ldots .$$

Для $\quad n \notin \mathbb{Z} \qquad C_{n+k-1}^k = \dfrac{\Gamma(n+k)}{k!\Gamma(n)}, \qquad \Gamma(r) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-y} y^{r-1}\, dy, \quad r > 0.$

Если $n \in \mathbb{Z}$, то X описывает число испытаний Бернулли, проведенных до достижения ровно n успехов.

$$EX = \frac{n(1-p)}{p}, \qquad VarX = \frac{n(1-p)}{p^2}.$$

5. Геометрическое распределение

Частный случай отрицательного биномиального распределения при $n = 1$.

$$P(X = k) = p(1-p)^k, k = 0, 1, \ldots .$$

6. Равномерное распределение на $[a, b]$

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leqslant x \leqslant b; \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases}$$

$$EX = \frac{a+b}{2}, \qquad VarX = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

7. Нормальное распределение (Гаусса)

Случайная величина X имеет нормальное (гауссово) распределение с параметрами μ и σ^2, $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$ ($X \in N(\mu, \sigma^2)$), если

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

$$EX = \mu, \qquad VarX = \sigma^2.$$

Если $X \in N(0, 1)$, то X имеет стандартное нормальное распределение. Для этого распределения $\Phi(x)$ – функция распределения, $\varphi(x)$ – плотность

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\, dt.$$

Если $X \in N(\mu, \sigma^2)$, то

$$P(X < x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

8. Гамма-распределение

Случайная величина X имеет гамма-распределение с параметром формы $\alpha > 0$ и параметром масштаба $\lambda > 0$, если плотность

$$f_X(x) = p(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot e^{-\lambda x} \cdot x^{\alpha-1}, & x \geqslant 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

$$EX = \frac{\alpha}{\lambda}, \qquad VarX = \frac{\alpha}{\lambda^2}.$$

9. Экспоненциальное распределение

Специальный случай гамма-распределения с $\alpha = 1$.

$$f_X(x) = p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geqslant 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

$$EX = \frac{1}{\lambda}, \qquad VarX = \frac{1}{\lambda^2}.$$

10. Распределение Парето

Случайная величина X имеет распределение Парето, если плотность

$$p(x) = \begin{cases} \frac{(ax-b)^\alpha}{(cx-d)^\beta}, & x \geqslant h; \\ 0, & x < h. \end{cases}$$

где $b, d \in R$, $a \geqslant 0$, $c > 0$, $\alpha \geqslant 0$, $\beta > 0$, $h > \frac{c}{d}$.

$$p(x) = \frac{\alpha}{\lambda}\left(\frac{\lambda}{\lambda + x}\right)^{\alpha+1}, \qquad 0 < x < \infty,$$

$$\overline{F}_X(x) \equiv P(X > x) = \left(\frac{\lambda}{\lambda + x}\right)^{\alpha},$$

$$EX = \frac{\lambda}{\alpha - 1}, \qquad VarX = \frac{\lambda^2\alpha}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)},$$

$$\sigma_X = \frac{\lambda}{\alpha - 1}\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha - 2}}, \qquad c_X = \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha - 2}}.$$

11. Распределение Коши

$$p(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\lambda}{\lambda^2 + (x-a)^2}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

$a \in \mathbb{R}$ – параметр положения (сдвига), $\lambda > 0$ – параметр масштаба.

12. Распределение Лапласа

$$p(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x-a|}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

$a \in \mathbb{R}$ – параметр положения (сдвига), $\lambda > 0$ – параметр масштаба.