

1. МОДЕЛИ ИНДИВИДУАЛЬНОГО РИСКА

1. Договор группового страхования сотрудников небольшого предприятия гарантирует выплаты в случае временной нетрудоспособности из-за болезни. Страховое возмещение выплачивается в конце каждого полного месяца нетрудоспособности, но не более, чем за 6 месяцев.

Размер возмещения зависит от профессионального класса работника; соответствующие данные приведены в таблице.

Вероятность заболевания в течение определенного промежутка времени для работников первого (второго) профессионального класса в три (соответственно, в два) раза больше, чем вероятность заболевания для работника третьего профессионального класса. За рассматриваемый промежуток времени вероятность того, что сотрудник заболит два или больше раз, равна нулю.

Вероятность выздоровления больного работника в течение ближайшего месяца равна 0.1, 0.2 или 0.3 в соответствии с тем, к какому профессиональному классу (первому, второму или третьему) он принадлежит, и не зависит от того, как долго он уже болен.

Ожидаемые суммарные выплаты по договору за рассматриваемый промежуток времени равны 4900.

Определите вероятность заболевания в течение рассматриваемого промежутка времени для работников третьего профессионального класса.

Профессиональный класс	Число работников	Ежемесячные выплаты в случае нетрудоспособности
I	100	50
II	10	100
III	2	200

2. Страховая компания продала 300 полисов страхования от пожара. Структура портфеля задается таблицей. Известно, что

1) величина ущерба для каждого договора (в случае наступления страхового случая) равномерно распределена от 0 до страховой суммы,

2) вероятность более чем одного страхового случая по договору равна 0.

3) страховые случаи происходят независимо.

Подсчитайте дисперсию суммарных выплат по всему портфелю.

число договоров	страховая сумма по договору	вероятность страхового случая для одного договора
100	400	0.05
200	300	0.06

3. Рассмотрим портфель из четырех одинаковых договоров страхования жизни. Страховая сумма зависит от причины смерти; в случае смерти от "естественных" причин

страховая сумма равна 250 000 руб., а если смерть наступила от несчастного случая, то выплачивается удвоенная страховая сумма. Для каждого из застрахованных вероятность смерти от несчастного случая равна 0.1, вероятность смерти от естественных причин равна 0.1. Найдите распределение суммарных выплат.

4. Компания обеспечивает страховую защиту домов в трех городах: J, K и L. Поскольку эти города находятся на достаточно большом расстоянии друг от друга, разумно предположить, что потери компании в этих городах не зависят друг от друга.

Производящие функции моментов величины потерь в этих городах даются формулами:

$$\begin{aligned}M_J(t) &= (1 - 2t)^{-3}; \\M_K(t) &= (1 - 2t)^{-2,5}; \\M_L(t) &= (1 - 2t)^{-4,5}.\end{aligned}$$

Пусть случайная величина X описывает общие потери во всех трех городах. Подсчитайте EX^3 .

5. Компания заключила 32 договора страхования. Для каждого договора вероятность q наступления страхового случая равна $1/6$, а страховое возмещение B , выплачиваемое после наступления страхового случая, имеет плотность

$$f_B(y) = \begin{cases} 2(1 - y), & \text{если } 0 < y < 1; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть S – общие выплаты по всему портфелю. Используя нормальное приближение, оцените $P(S > 4)$.

6. Общая величина выплат по договору медицинского страхования имеет плотность

$$f(x) = \frac{1}{1000} e^{-x/1000}, \quad x > 0.$$

Премия за этот продукт установлена на уровне, превышающем на 100 ожидаемые выплаты.

Если продано 100 договоров, какова приблизительно вероятность того, что потери страховой компании будут превышать собранные премии?

7. Предположим, что в компании застраховано $N = 3000$ человек с вероятностью смерти в течение года $q = 0.3\%$. Компания выплачивает сумму $b = 250\,000$ руб. в случае смерти застрахованного в течение года и не платит ничего, если этот человек доживет до конца года.

Определите суммарную премию, достаточную, чтобы обеспечить вероятность разорения порядка 5%.

8. В страховой компании, которая занимается страхованием от пожаров, застраховано 160 зданий. В таблице описана структура портфеля. Вероятность пожара на

отдельном объекте в течение года равна 0.04. В случае пожара ущерб равномерно распределен от 0 до страховой суммы. Все рассматриваемые риски – независимы. Пусть ν – общее число страховых случаев, S – суммарные выплаты компании за один год.

Число договоров	Страховая сумма
80	10 000
35	20 000
25	30 000
15	50 000
5	100 000

Подсчитайте:

- 1) среднее значение и дисперсию случайной величины ν ;
- 2) среднее значение и дисперсию случайной величины S ;
- 3) относительную защитную надбавку θ , достаточную, чтобы 99% собранных премий хватило для покрытия всех потерь (используйте нормальное приближение).

9. Страховщик заключил $N = 10\,000$ договоров страхования жизни сроком на один год на следующих условиях В случае смерти застрахованного в течение года от несчастного случая компания выплачивает выгодоприобретателю 1 000 000 руб., а в случае смерти от естественных причин – 250 000 руб. Компания не платит ничего, если застрахованный не умрет в течение года. Вероятность смерти от несчастного случая одна и та же для всех застрахованных и равна 0,0005. Вероятность смерти от естественных причин зависит от возраста. Застрахованных можно разбить на две возрастные группы, содержащие $N_1 = 4000$ и $N_2 = 6000$ человек, с вероятностью смерти в течение года $q_1 = 0.0040$ и $q_2 = 0.0020$ соответственно.

Подсчитайте премию, достаточную для выполнения компанией своих обязательств с вероятностью 95% без привлечения дополнительных средств. Защитная надбавка для индивидуального договора берется пропорциональной:

- 1) нетто-премии;
- 2) дисперсии выплат по договору;
- 3) среднему квадратичному отклонению выплат по договору.

10. Компания продает договора страхования жизни на один год. Информация относительно структуры покрытия приведена в таблице.

Страховая сумма	Причина смерти	Вероятность
500 000	обычная	0.10
1 000 000	несчастный случай	0.01

Относительная защитная надбавка равна 20%.

Предположим, что отдельные полисы независимы и страховщик использует нормальное приближение для распределения суммарных выплат.

Определите, сколько договоров должен продать страховщик, чтобы собранная премия с вероятностью 95% покрывала суммарные выплаты.

11. Известно, что:

1) условное распределение медицинских расходов для человека с геном, вызывающим раковые заболевания, имеет среднее значение 100 и дисперсию 500;

2) условное распределение медицинских расходов для человека, который не имеет гена, вызывающего раковые заболевания, имеет среднее значение 10 и дисперсию 70;

3) число людей с геном, вызывающим раковые заболевания, в группе из n случайно выбранных человек имеет биномиальное распределение с параметрами n и $p = 0.02$.

Страховщик определяет премию по договору медицинского страхования для группы как среднее плюс одно стандартное отклонение распределения суммарных медицинских расходов для этой группы.

Определите премию для группы из 20 случайно выбранных людей.

12. Страховая компания занимается автомобильным страхованием. Пусть случайная величина X обозначает общие потери компании по договорам страхования на случай повреждения автомобиля при аварии, а случайная величина Y обозначает общие потери компании по договорам страхования гражданской ответственности водителей (все суммы измеряются в млн. долларов). Известно, что совместное распределение случайных величин X и Y задается формулой:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x+2-y}{4}, & \text{если } 0 < x < 1 \text{ и } 0 < y < 2; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Найдите вероятность того, что общие потери составят по меньшей мере 1 млн. долларов.